# Euclide et expo modulaire – TE 808A

| Problème | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Points | 4 | 4 | 4 | 9 | 4 | 25 |
| Points obtenus | | | | | | |

**Problème 1** (4 points)
Calculer les nombres entiers $x$ et $y$ tels que

$$\overset{a}{9945}\,x + \overset{b}{3003}\,y = \text{pgcd}(9945, 3003)$$

Donner également le pgcd(9945, 3003).

| Ligne | reste | ·a | ·b | q |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9945 | 1 | 0 | |
| 2 | 3003 | 0 | 1 | |
| 3 | 936 | 1 | −3 | 3 |
| 4 | 195 | −3 | 10 | 3 |
| 5 | 156 | 13 | −43 | 4 |
| 6 | 39 | −16 | 53 | 1 |
| 7 | 0 | | | |

$x = -16$ , $y = 53$ et pgdc$(a,b) = 39$

**Problème 2** (4 points)
Démontrer que les nombres 5045 et 3987 sont premiers entre eux.

$\mathrm{pgdc}(5045, 3987) = \mathrm{pgdc}(3987, 1058) = \mathrm{pgdc}(1058, 813)$

$= \mathrm{pgdc}(813, 245) = \mathrm{pgdc}(245, 78) = \mathrm{pgdc}(78, 11)$

$= \mathrm{pgdc}(11, 7) = 1$

**Problème 3** (4 points)
En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver une solution $(x\,,y)$ de l'équation

$$\overset{b}{17}\,x + \overset{a}{31}\,y = 2024$$

| Ligne | reste | $\cdot a$ | $\cdot b$ | quotient |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 31 | 1 | 0 | |
| 2 | 17 | 0 | 1 | |
| 3 | 14 | 1 | −1 | 1 |
| 4 | 3 | −1 | 2 | 1 |
| 5 | 2 | 5 | −9 | 4 |
| 6 | 1 | −6 | 11 | 1 |

$$17 \cdot 11 + 31 \cdot (-6) = 1 \quad \Big) \cdot 2024$$

$$17 \cdot 22264 + 31 \cdot (-12144) = 2024$$

**Problème 4** (9 points)
Effectuer les calculs ci-dessous.

a) $35^{12} \pmod{120}$ b) $48^{66} \pmod{103}$ c) $37^{30} \pmod{667}$

a) $8+4=12$

$35^1 \equiv 35 \pmod{120}$
$35^2 \equiv 25$ "
$35^4 \equiv 25^2 \equiv 25$ "
$35^8 \equiv 25$ "

$35^{12} \equiv 25 \cdot 25 \equiv 25 \pmod{120}$

b) $64+2=66$

$48^1 \equiv 48 \pmod{103}$
$48^2 \equiv 38$ "
$48^4 \equiv 2$ "
$48^8 \equiv 4$ "
$48^{16} \equiv 16$ "
$48^{32} \equiv 50$ "
$48^{64} \equiv 28$ "

$48^{66} \equiv 48^{64} \cdot 48^2 \equiv 28 \cdot 38 \equiv 1064 \equiv 34 \pmod{103}$

c) $16+8+4+2=30$

$37^1 \equiv 37 \pmod{667}$
$37^2 \equiv 35$ "
$37^4 \equiv 558$
$37^8 \equiv 542$
$37^{16} \equiv 284$

$37^{30} \equiv 284 \cdot 542 \cdot 558 \cdot 35 \equiv 151 \pmod{667}$

**Problème 5** (4 points)

Quels sont les deux derniers chiffres de $7^{9^{9^{9}}}$ ?

On calcule $7^{9^{9}}$ (mod 10).

$7^9 \equiv 40353607 \equiv 7 \pmod{10}$

$(7^9)^9 \equiv 7^9 \equiv 7 \pmod{10}$

$((7^9)^9)^9 \equiv 7^9 \equiv 7 \pmod{10}$

Les deux derniers chiffres sont 07.