

3.1.4 On a six wagons à trier. Dans la gare de triage, les wagons entrent dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir dans l'ordre croissant.

Deux wagons i et j peuvent être mis sur la même voie si et seulement s'ils entrent dans l'ordre dans lequel ils doivent sortir.

Dessiner un graphe illustrant la situation, en indiquant ce que représentent les sommets et les arêtes de votre graphe.

Quel sera le nombre minimal de voies nécessaires au tri ?

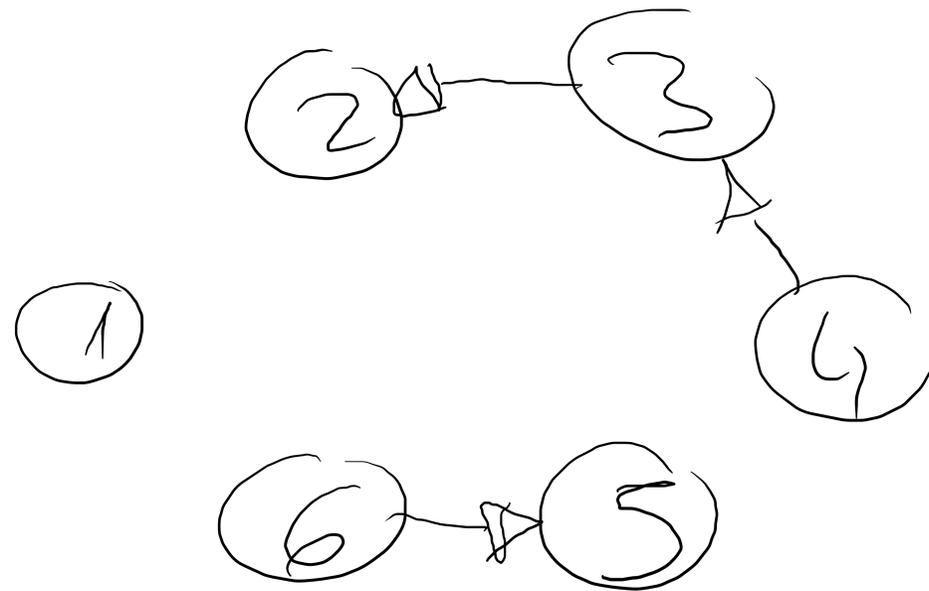


2 1 3 4 5 6

Ordre = 2, 5, 3, 6, 1, 4

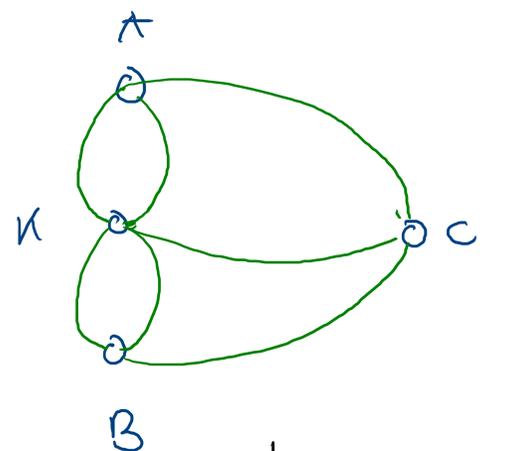
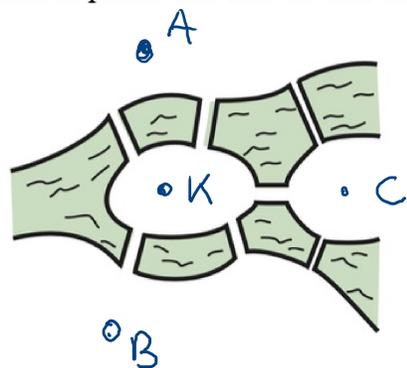
⊖ = Wagon

→ = peut aller
derrière le
wagon



3.1.5 (Les sept ponts de Königsberg)

Au XVIII^e siècle les habitants de Königsberg aimaient se promener le dimanche et traverser les différents ponts de leur ville. Ils se demandaient s'il leur était possible de parcourir la ville en empruntant chacun des 7 ponts une fois et une seule.



4 sommets

7 arêtes

Un promeneur veut traverser, une fois et une seule, chacun des sept ponts de la ville.

- Peut-il trouver un itinéraire tel que la région d'arrivée soit la même que celle de départ? NON
- Peut-il trouver un itinéraire tel que les régions d'arrivée et de départ soient distinctes?

2) chacun des ponts A, B, C et K permet d'accéder à un nombre impair de ponts : 3 ou 5.

Si la région d'arrivée est la même que la région de départ, cela veut dire que le nombre d'entrées et de sorties en chacun des ponts est obligatoirement un nombre pair.

Ce n'est pas le cas.

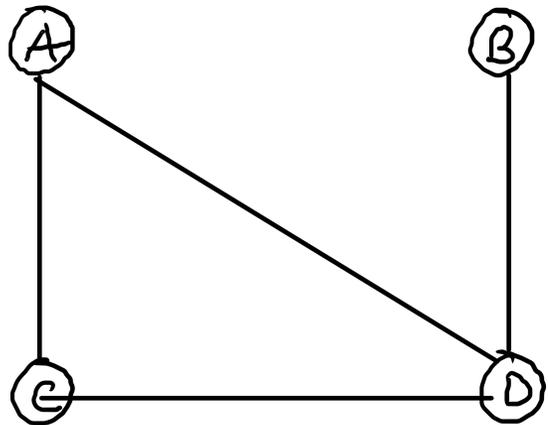
b) Si la région d'arrivée est distincte de la région de départ, on doit pouvoir, pour les deux autres régions, sortir autant de fois que l'on entre, ce qui est encore impossible.

Conclusion

Il est impossible de traverser une fois et une seule, chacun des sept ponts.

Lemme des poignées de main

3.1.7 Démontrer le **théorème des poignées de main** : La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.



nombre d'arêtes : 4

somme des degrés : $2 + 1 + 2 + 3 = 8$

Quand on calcule la somme des degrés des sommets, chaque arête est comptée deux fois.

Corollaire

Dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est un nombre pair.