

19.12.23

Fonction indicatrice d'Euler

On dit que deux nombres a et b sont premiers entre eux si $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Par exemple 21 et 38 sont premiers entre eux.

La fonction indicatrice d'Euler, notée φ (phi), est l'application qui, à tout entier naturel n non nul, associe le nombre des entiers naturels inférieurs à n et relativement premiers à n .

$$\varphi(12) = 4$$

$$\{\textcircled{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \textcircled{5}, \cancel{6}, \textcircled{7}, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, \textcircled{11}, \cancel{12}\}$$

Exemples

$$1) \varphi(20) = 8$$

$$\{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

$$2) \varphi(11) = 10$$

$$3) \varphi(37) = 36$$

$$4) \varphi(3) = 2$$

$$\varphi(9) = \varphi(3^2) = 6 = 3^2(3-1)$$

$$\varphi(81) = \varphi(3^4) = 3^4 - 3^3 = 3^3(3-1) = 54$$



1707 - 1783

1	11	21	31	41	51	61	71	81
2	12	22	32	42	52	62	72	
3	13	23	33	43	53	63	73	
4	14	24	34	44	54	64	74	
5	15	25	35	45	55	65	75	
6	16	26	36	46	56	66	76	
7	17	27	37	47	57	67	77	
8	18	28	38	48	58	68	78	
9	19	29	39	49	59	69	79	
10	20	30	40	50	60	70	80	

$$\varphi(125) = \varphi(5^3) = 5^3 - 5^2 = 5^2(5-1) = 100$$

Propriétés de φ

$$1) \varphi(p) = p-1, \quad p \text{ premier}$$

$$2) \varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1), \quad p \text{ premier}$$

$$3) \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \quad \text{si} \quad \text{pgcd}(a, b) = 1$$

2.6.13 On note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}_n$. Calculer $\varphi(n)$ pour les valeurs de n données ci-dessous :

a) $n = 4, n = 8, n = 16, n = 32;$

b) $n = 3, n = 9, n = 27, n = 81;$

c) $n = 7^5;$

d) $n = 4027;$ est premier

e) $n = 4087;$

$$\varphi(p^r) = p^{r-1} (p-1)$$

a) $\varphi(4) = \varphi(2^2) = 2^1 \cdot 1 = 2$

$$\varphi(8) = \varphi(2^3) = 2^2 = 4$$

c) $\varphi(7^5) = 7^4 \cdot 6$

d) $\varphi(4027) = 4026$

e) $\varphi(4087) = \varphi(61 \cdot 67) = \varphi(61) \cdot \varphi(67) = 60 \cdot 66$

Soit $a = 28$ et $n = 15$. On a $\text{pgcd}(28, 15) = 1$

$$\cdot \varphi(15) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$$

les nombres premiers avec 15 : $\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

$$28^2 \equiv 784 \equiv 4 \pmod{15}$$

$$28^4 \equiv 4^2 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{15}$$

$$28^8 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{15}$$

$$28^{\varphi(15)} \equiv 1 \pmod{15}$$