Exercice 2

a) Séparer les racines réelles de l'équation $x^4 + x - 1 = 0$

b) Déterminer par la méthode de la bissection une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune de ces solutions.

$P(x) = x^4 + x - 1$; $P(-x) = x^4 - x - 1$

$V_p = 1$, $z_p = 1$; $V_n = 1$; $z_n = 1$

z_p	z_n	$z_{\mathbb{C}}$	z
1	1	2	4

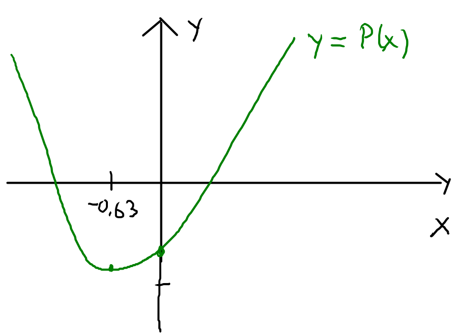
Etudions la croissance de $P(x) = x^4 + x - 1$.

$P'(x) = 4x^3 + 1$; $P(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}} \cong -0,63$

x		-0.63	
$P'(x)$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$

$f(-0,63) \cong 1.47$



$\underline{z_n}$: $f(-2) = 16 - 2 - 1 = 13$
$f(-1) = 1 - 1 - 1 = -1$

$\alpha_1 \in [-2; -1]$
zéro négatif

$\underline{z_p}$: $f(0) = -1$
$f(1) = 1$

$\alpha_2 \in [0; 1]$
zéro positif

i	a_i	x_i	b_i	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	-2	-1.5	-1	+	+	-	/
1	-1.5	-1.25	-1	+	+	-	0.25
2	-1.25	-1.125	-1	+	-	-	0.125
3	-1.25	-1.1875	-1.125	+	-	-	0.0625
4	-1.25	-1.2187	-1.1875	+	-	-	0.0312
5	-1.25	-1.2343	-1.2187	+	+	-	0.0156
6	-1.2343	-1.2265	-1.2187	+	+	-	0.0078

Il faut 6 itérations

Rappel : $a^x = b \quad , \quad a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ $\qquad 7^x = 4{,}05$

$$\ln\left(a^x\right) = \ln(b)$$
$$x \ln(a) = \ln(b)$$
$$x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

$$\log = \log_{10}$$

Nombre d'itérations nécessaires :

Estimation de l'erreur :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$$

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \quad \Big| \cdot \frac{2^{n+1}}{\varepsilon}$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1} \quad \Leftrightarrow$$

$$2^{n+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$(n+1) \cdot \ln(2) \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \quad \Big| \div \ln(2)$$

$$n+1 \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$$

$$n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1$$

Dans l'exercice 2 : $n \geq \dfrac{\ln(-1-(-2)) - \ln(0{,}01)}{\ln(2)} - 1 = \dfrac{\ln(1) - \ln(0{,}01)}{\ln(2)} - 1$

$n \geq 5{,}64 \Rightarrow$ 6 itérations

$$n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon) - \ln(2)}{\ln(2)} = \boxed{\frac{\ln(b-a) - \ln(2\varepsilon)}{\ln(2)}}$$