1.1.5 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,e^x}{1-e^x}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\,e^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\,e^x - 1}{e^x + 2}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + x)\,e^x$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 - 2x + 3}$

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x-2} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x}{1} = e^2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,e^x}{1-e^x} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1\cdot e^x + x\cdot e^x}{-e^x} = \dfrac{1+0}{-1} = -1$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\cdot e^{\frac{1}{x}} \underset{\text{"}0_+\cdot +\infty\text{"}}{\overset{Ind}{=}} \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{1}{t}\,e^t = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{e^t}{t}$

Posons $x = \dfrac{1}{t}$

x	t
0_+	$+\infty$

$\underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{e^t}{1} = +\infty$

Remarquons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x\,e^{\frac{1}{x}} = 0_-\cdot 0_+ = 0_-$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x} \underset{\text{"}\frac{0+\infty}{-\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{2}$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^{x}}_{0_+} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^{-x}}_{+\infty} = 0-\infty = -\infty$$

f) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{e^{x}}}{\cancel{e^{x}}} = 2$$

g) $$\lim_{x\to-\infty}(x^2+x)e^{x} \underset{\text{"}+\infty\cdot 0\text{"}}{\overset{ind}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{e^{-x}} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{-e^{-x}} \underset{\text{"}\frac{-\infty}{-\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

h) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2-2x+3} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2x-2} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{2}$$

$$= +\infty$$