1.3.17 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Il faut trouver les zéros de $f(x)$.

$f(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$ ✓

$f(-1) = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$ ✓

Posons $F = x^3 - 2x^2 - x + 2$

• Divisons F par $(x+1)$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

• $F = (x+1)(x^2 - 3x + 2) = (x+1)(x-1)(x-2)$

• $\int (x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

Aire : $\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{1}^{2} f(x)\,dx \right| = A_1 + A_2$

$$A_1 = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{1} \right| = \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2\right) \right|$$

$$= \left| -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 \right| = \left| 4 - \frac{4}{3} \right| = \frac{8}{3}$$

$$A_2 = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{1}^{2} \right| = \left| \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3} - \frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) \right|$$

$$= \left| 4 - \frac{16}{3} - 2 + 4 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right| = \frac{5}{12}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$

b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

- Signe de $4-x^2$:

x		-2		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

- $ED(f) = [-2;2]$
- Signe de $f(x)$:

x		-2		0		2	
$f(x)$		0	$-$	0	$+$	0	

- $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \int x\,(4-x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + c$
$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 + c$

candidat : $K(4-x^2)^{3/2}$

$(\text{candidat})'$: $K \cdot \frac{3}{2}(4-x^2)^{1/2} \cdot (-2x) = -3K\,x(4-x^2)^{1/2}$

$-3K = 1 \Rightarrow K = -\frac{1}{3}$

Aire : $\left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = A_1 + A_2$

$A_1 = \left|-\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\right]_{-2}^{0}\right| = \left|-\frac{1}{3}\left(2^3 - 0\right)\right| = \frac{8}{3}$

$A_2 = \left|-\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\right]_{0}^{2}\right| = \left|-\frac{1}{3}\left(0 - 2^3\right)\right| = \frac{8}{3}$

$A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$