Géométrie – Le cercle – TE 800A

Problème	1	2	3	4	Total
Points	3	5	14	10	32
Points obtenus					

Problème 1 (3 points)
Déterminer le centre C et le rayon du cercle R du cercle γ donné par l'équation

$$(\gamma) : x^2 + y^2 - 8\,x + 6\,y + 16 = 0$$

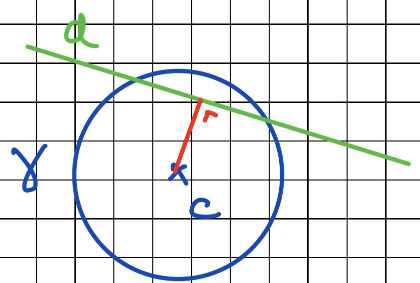
$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = -16 + 16 + 9$

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$

$C(4\,;-3)$; $R = 3$

Problème 2 (5 points)
Déterminer si la droite $(d) : x + 2y = 3$ coupe le cercle $(\gamma) : (x-3)^2 + (y-5)^2 = 20$.
Si c'est le cas, déterminer le nombre d'intersections.

γ : Centre $C(3\,;5)$; rayon $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



distance $(C\,;d) = \dfrac{|3+10-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

(d) : $x + 2y - 3 = 0$

$= \dfrac{10}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

$= R$

La droite d est tangente au cercle γ.
Il n'y a qu'un point d'intersection.

Problème 3 (14 points)
On donne le point $T(3;2)$ et les deux droites $(a) : x - 2y + 1 = 0$ et $(b) : 2x + y - 3 = 0$.

a) Montrer que le point T appartient à la droite a.

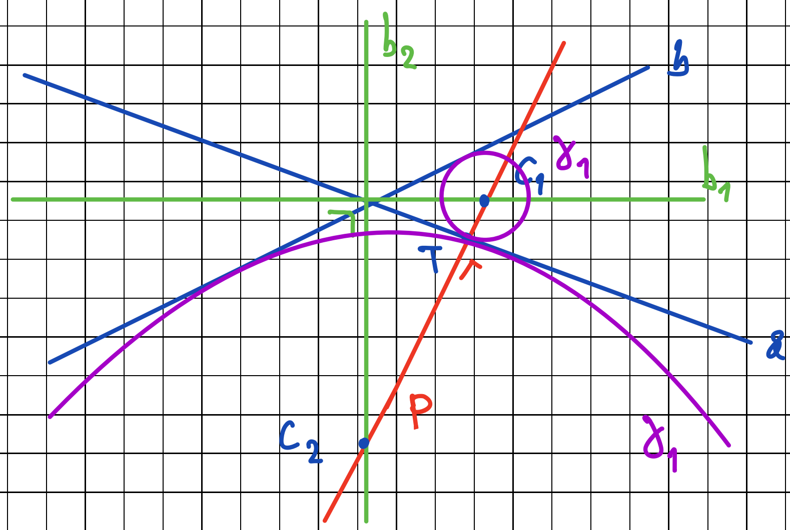
b) Déterminer les équations des bissectrices b_1 et b_2 des droites a et b.

c) Déterminer par calcul les équiations des deux cercles tangents aux droites a et b avec T l'un des points de contact.

$(a) : x - 2y + 1 = 0$

$(b) : 2x + y - 3 = 0$

a) $3 - 2 \cdot 2 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow T \in a$



b) bissectrices: $\dfrac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{2x + y - 3}{\sqrt{5}}$

"+" : $x + 3y - 4 = 0$ "−" : $3x - y - 2 = 0$

c) perpendiculaire à a en T : $2x + y + k = 0$

$6 + 2 = -k \Rightarrow k = -8$

$(p) : 2x + y = 8$

Les deux centres:

$$\begin{cases} 2x+y=8 & \cdot 1 \\ x+3y=4 & \cdot(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5y=0 \\ 2x=8 \end{cases} \Rightarrow \underline{C_1(4;0)}$$

$$\begin{cases} 2x+y=8 & \cdot 3 \\ 3x-y=2 & \cdot(-2) \end{cases} \quad x$$

$$\begin{cases} 5x=10 \\ 5y=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\underline{C_2(2;4)}$$

Rayon:

$$\text{distance}(C_1, d) = \frac{|4-0+1|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = R_1$$

$$\text{disance}(C_2, d) = \frac{|2-8+1|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = R_2$$

$$\underline{(\gamma_1): (x-4)^2 + y^2 = 5}$$

$$\underline{(\gamma_2): (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5}$$

Problème 4 (10 points)
Trouver les équations de toutes les tangentes au cercle $\gamma : (x-9)^2 + (y-11)^2 = 29$ passant par le point $P(6;4)$.

$C(9;11)$ et $R = \sqrt{29}$

$$y - 11 = m(x-9) \pm \sqrt{29}\sqrt{m^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad 4 - 11 = m(6-9) \pm \sqrt{29}\sqrt{m^2+1}$$

$$3m - 7 = \pm\sqrt{29}\sqrt{m^2+1} \quad \Big|\ (\ )^2$$

$$9m^2 - 42m + 49 = 29m^2 + 29$$

$$20m^2 + 42m - 20 = 0 \quad \Big|\ \div 2$$

$$10m^2 + 21m - 10 = 0$$

$$(5m-2)(2m+5) = 0$$

$$m_1 = \frac{2}{5} \quad ; \quad m_2 = -\frac{5}{2}$$

(t_1) : $2x - 5y + k = 0$
$P(6;4)$: $12 - 20 + k = 0$
$k = 8$

(t_2) : $5x + 2y + k' = 0$
$30 + 8 + k' = 0$
$k' = -38$

(t_1) : $2x - 5y + 8 = 0$ (t_2) : $5x + 2y - 38 = 0$