Géométrie – Le cercle – TE 800B

Problème	1	2	3	4	Total
Points	3	5	14	10	32
Points obtenus					

Problème 1 (3 points)
Déterminer le centre C et le rayon du cercle R du cercle γ donné par l'équation

$$(\gamma) : x^2 + y^2 - 10\,x + 8\,y + 25 = 0$$

(γ): $x^2 - 10x + 25 + y^2 + 8y + 16 = -25 + 25 + 16$

$(x-5)^2 + (y+4)^2 = 16$

$C(5\,;-4)$; $R = 4$

Problème 2 (5 points)
Déterminer si la droite $(d) : x + 2y = 5$ coupe le cercle $(\gamma) : (x-9)^2 + (y-3)^2 = 20$.
Si c'est le cas, déterminer le nombre d'intersections.

(d): $x + 2y - 5 = 0$

$C(9\,;3)$, $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

distance $(C, d) = \dfrac{|9+6-5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5}$

$= 2\sqrt{5} = R$

La droite est tangente au cercle.

Il n'y a qu'un point d'intersection.

Problème 3 (14 points)
On donne le point $T(5;4)$ et les deux droites $(a) : 2x - 3y + 2 = 0$ et $(b) : 3x + 2y - 10 = 0$.

a) Montrer que le point T appartient à la droite a.

b) Déterminer les équations des bissectrices b_1 et b_2 des droites a et b.

c) Déterminer par calcul les équations des deux cercles tangents aux droites a et b avec T l'un des points de contact.

a) $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 2 = 10 - 12 + 2 = 0$ ✓ $T \in a$

b) $\dfrac{2x-3y+2}{\sqrt{13}} = \pm \dfrac{3x+2y-10}{\sqrt{13}}$

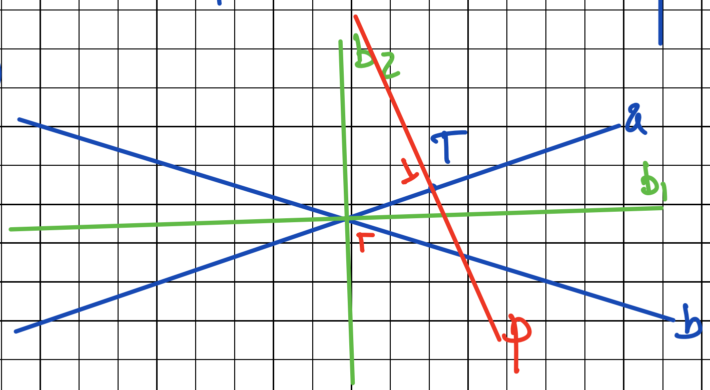
"+" : $2x - 3y + 2 = 3x + 2y - 10$

(b_1) : $x + 5y - 12 = 0$

"−" : $2x - 3y + 2 = -3x - 2y + 10$

(b_2) : $5x - y - 8 = 0$

c)



perpendiculaire à a issue de T :

(p) : $3x + 2y + k = 0$ par T : $15 + 8 + k = 0 \Rightarrow k = -23$

$3x + 2y - 23 = 0$

Centre des cercles :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 23 & \cdot 1 \\ x + 5y = 12 & \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13y = -13 \\ x = 12 - 5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 23 & \cdot 1 \\ 5x - y = 8 & \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x = 39 \\ y = 5x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1(7;1) \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow C_2(3;7)$$

Rayon :

$$\text{distance}(C_1, d) = \frac{|14 - 3 + 2|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\text{distance}(C_2, d) = \frac{|6 - 21 + 2|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$(\gamma_1) : (x-7)^2 + (y-1)^2 = 13$$

$$(\gamma_2) : (x-3)^2 + (y-7)^2 = 13$$

Problème 4 (10 points)
Trouver les équations de toutes les tangentes au cercle $\gamma : (x-6)^2 + (y-9)^2 = 29$ passant par le point $P(3;2)$.

$C(6;9)$ et $R = \sqrt{29}$

$$y - 9 = m(x-6) \pm \sqrt{29}\sqrt{m^2+1}$$

par P: $$-7 = m \cdot (-3) \pm \sqrt{29}\sqrt{m^2+1}$$

$$3m - 7 = \pm \sqrt{29}\sqrt{m^2+1} \quad \Big|\ (\,)^2$$

$$9m^2 - 42m + 49 = 29m^2 + 29$$

$$20m^2 + 42m - 20 = 0 \quad \Big|\ \div 2$$

$$10m^2 + 21m - 10 = 0$$

$$(5m - 2)(2m + 5) = 0$$

$$m_1 = \frac{2}{5} \qquad m_2 = -\frac{5}{2}$$

(t_1) : $2x - 5y + K = 0$ $\quad$ (t_2): $5x + 2y + K' = 0$

$P(3;2)$ $\quad$ $6 - 10 + K = 0$ $\quad$ $15 + 4 + K' = 0$

$K = 4$ $\quad$ $K' = -19$

(t_1): $2x - 5y + 4 = 0$ $\qquad$ (t_2): $5x + 2y - 19 = 0$