3M1 – Jeudi 16 octobre 2023 Nom & prénom : ....

Exponentielle et Logarithme – TE 805A

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	5	8	[redacted] 6	[redacted] 10	[redacted] 4	[redacted] 33
Points obtenus						

Problème 1 (5 points)
Donner l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x+5}\right)$ b) $g(x) = e^{\sqrt{2-x}}$

a) condition : $\frac{2x-3}{x+5} > 0$

Tableau des signes de $\frac{2x-3}{x+5}$:

x		-5		$3/2$	
$2x-3$	$-$	‖	$-$	0	$+$
$x+5$	$-$	‖	$+$		$+$
$\frac{2x-3}{x+5}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

$3/2$

-5

$ED(f) = \left]-\infty ; -5\right[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$

b) Condition : $2 - x \geq 0 \iff x \leq 2$

$ED(g) = \left]-\infty ; 2\right]$

Problème 2 (8 points)
Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{5\,x-20}{e^x-e^4} = 5/e^4$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\,x-1}{4\,\ln(x)} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2\,x^3} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{3\,x}-e^{2\,x}}{x+1-\cos(x)} = 1$

a) $$\lim_{x\to4}\frac{5x-20}{e^x-e^4} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to4}\frac{5}{e^x} = \frac{5}{e^4}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{4\ln(x)} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\frac{4}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{4} = +\infty$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x^3} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x^2} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{12x} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{12} = +\infty$$

d) $$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x+1-\cos(x)} \underset{\text{"}\frac{1-1}{1-1}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to0}\frac{3e^{3x}-2e^{2x}}{1+\sin(x)} = 1$$

Problème 3 (6 points)

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\,x^2}{2\,e^x}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x)$.

b) Déterminer par calculs ~~toutes~~ les asymptotes de la fonction $f(x)$.
verticales et horizontales

a) $ED(f) = \mathbb{R}$

b) Pas d'AV

AHG: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^2}{2e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)}{2e^x} \underset{\text{“}\frac{-\infty}{0_+}\text{”}}{=} -\infty$

Pas d'AHG

AHD: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)}{2e^x} \underset{\text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-4x}{2e^x} \underset{\text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}}{\overset{BH}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x-4}{2e^x} \underset{\text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{2e^x} = 0$

$y = 0$ est une AHD.

10

Problème 4 ([redacted] points)

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(4x)}{x^2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x)$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction $f(x)$.

c) Déterminer la croissance de la fonction $f(x)$. Calculer les coordonnées des éventuels extrema.

a) Conditions : $\left.\begin{array}{l} \bullet\ 4x > 0 \\ \bullet\ x^2 \neq 0 \end{array}\right\}$ $ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

b) $$f'(x) = \frac{\frac{4}{4x}\cdot x^2 - \ln(4x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(4x)}{x^4}$$

$$= \frac{x(1-2\ln(4x))}{x^4} = \frac{1-2\ln(4x)}{x^3}$$

c) zéros de $f'(x)$: $2\ln(4x) = 1$

$\ln(4x) = 1/2 \iff x = \dfrac{\sqrt{e}}{4}$

x	0		$\sqrt{e}/4$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$
$f(x)$	||	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$

$$f\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{\left(\frac{\sqrt{e}}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{e}{16}} = \frac{8}{e}$$

$\text{Max}\left(\dfrac{\sqrt{e}}{4} ; 8e^{-1}\right)$

Problème 5 (4 [redacted] points)

Déterminer les zéros de la dérivée de la fonction $f(x) = (x^2 + 3\,x + 1) \cdot e^x$

$$f'(x) = (2x+3)\,e^x + (x^2+3x+1)\,e^x$$

$$= (x^2+5x+4)\,e^x$$

$$= (x+4)(x+1)\,e^x$$

zéros de $f'(x)$: -4 et -1