3M1 – Jeudi 25 janvier 2024 Nom & prénom : ....

Exp, aire et volume – TE 810B

Problème	1	2	3	4	5	**Total**
Points	12	6	6	6	10	40
Points obtenus						

Problème 1 (12 points)
Calculer :

a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{12}{3\,x-5}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4\,x}{(x^2+2)^3}\,\mathrm{d}x$

a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{12}{3x-5}\,dx = 4\ln(3x-5)\Big|_2^5 = \underline{4\cdot\ln(10)}$

$C = K\ln(3x-5)$

$C' = K\cdot\frac{3}{3x-5} \Rightarrow K = 4$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx = \int_0^1 2x\cdot(x^2+2)^{-3}\,dx = -(x^2+2)^{-2}\Big|_0^1$

$C = K(x^2+5)^{-2}$

$C' = K\cdot(-2)(x^2+5)^{-3}\cdot 2x = K\cdot(-4x)(x^2+5)^{-3} \Rightarrow -4K = 4$

$\Rightarrow K = -1$

$= \frac{-1}{(x^2+2)^2}\Big|_0^1 = \frac{-1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{-4+9}{36} = \underline{\frac{5}{36}}$

c) $\int_0^4 x \cdot e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^{16} \sqrt{x}+1\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^4 x \cdot e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}\Big|_0^4 = \underline{-\frac{1}{2}\left(e^{-16}-1\right)}$

$c = K \cdot e^{-x^2}$

$c' = K \cdot (-2x)\, e^{-x^2} \Rightarrow -2K = 1 \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$

d) $\int_0^{16} x^{\frac{1}{2}}+1\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \Big|_0^{16} = \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{x}\right)^3 + x\right)\Big|_0^{16}$

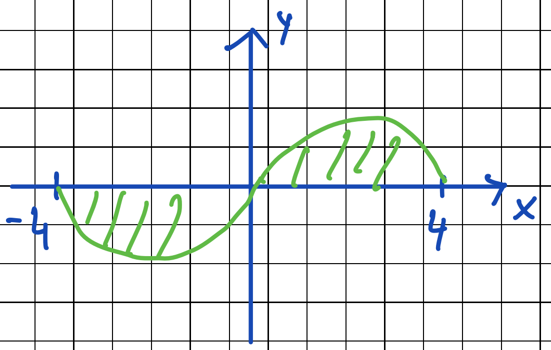
$= \frac{2}{3}\left(64+4\right) = \underline{\frac{136}{3}}$

Problème 2 (6 points)

Soit $f(x) = x \cdot \sqrt{16 - x^2}$.

Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox.

$f(x) = x\sqrt{(4-x)(4+x)}$ $\quad ED(f) = [-4, 4]$



Aire : $\left|\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}\,dx\right| + \left|\int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}\,dx\right| = A_1 + A_2$

$\int x(16-x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{1}{3}(16-x^2)^{\frac{3}{2}}$

$c = K(16-x^2)^{3/2}$

$c' = K(16-x^2)^{1/2}\cdot\frac{3}{2}\cdot(-2x) = -3Kx(16-x^2)^{1/2} \Rightarrow K = -\frac{1}{3}$

$A_1 = \left|-\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{16-x^2}\right)^3\right]_{-4}^{0}\right| = \left|-\frac{1}{3}\left(4^3 - 0\right)\right| = \frac{64}{3}$

$A_2 = \left|-\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{16-x^2}\right)^3\right]_{0}\right| = \left|-\frac{1}{3}\left(0 - 4^3\right)\right| = \frac{64}{3}$

Aire : $\frac{64}{3} + \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$

Problème 3 (6 points)
Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des fonctions f et g données ci-dessous.

$$f(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 12 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - 2\,x - 4$$

Intersection des deux courbes :

$$2x^2 - 4x - 12 = x^2 - 2x - 4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$\text{Aire} : \left| \int_{-2}^{4} (f(x) - g(x))\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{4} x^2 - 2x - 8 \,dx \right|$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x \Big|_{-2}^{4} \right| = \left| \left(\frac{64}{3} - 16 - 32 \right) - \left(\frac{-8}{3} - 4 + 16 \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{80}{3} - \frac{28}{3} \right| = \underline{36}$$

Problème 4 (6 points)
Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe.
Calculer son volume, sachant que $f(x) = x^2 + 4\,x$.

$f(x) = x(x+4)$

Volume :

$$V = \pi \int_{-4}^{0} (x^2+4x)^2\,dx = \pi \int_{-4}^{0} x^4 + 8x^3 + 16x^2 \; dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} + 2x^4 + \frac{16}{3}x^3 \right) \Bigg|_{-4}^{0} = \pi \left(0 - \left(-\frac{1024}{5} + 512 - \frac{1024}{3} \right) \right)$$

$$= \pi \, \frac{512}{15} = \frac{512}{15}\pi \cong 34{,}13$$

Problème 5 (10 points)
La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2.5\,\mu$g/mL.

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3\,t \cdot e^{-t/4} + 2 \qquad \text{avec } t \geqslant 0$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

a) Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

b) Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

c) Déterminer, à l'aide d'un tableau des variations de la fonction $f(t)$, l'instant t pour lequel le taux de vasopressine est maximal. Quel est alors ce taux ?

a) $f(0) = 2$ [μg/mL]

b) $f\left(\frac{12}{60}\right) = f(0.2) = 0.6 \cdot e^{-0.2/4} + 2 \cong 0,57 + 2 = 2,57$

$f(0.2) = 2.57 > 2.5$

Le taux n'est pas normal

c) $f'(t) = 3\,e^{-t/4} + 3t \cdot \left(-\frac{1}{4}\,e^{-t/4}\right) = 3e^{-t/4}\left(1 - \frac{1}{4}t\right)$

$u = 3t \quad ; \quad u' = 3$

$v = e^{-t/4} \quad ; \quad v' = -\frac{1}{4}\,e^{-t/4}$

$f'(t) = 0 \iff t = 4$ [min]

t		0		4	
$f'(t)$	//		+	0	−
$f(t)$	//	2	↗	max	↘

Le max est atteint lorsque $t = 4$ [s]

Le taux est égal à $f(4) = 12 \cdot e^{-1} + 2 = \frac{12}{e} + 2 \cong 6{,}41$

Ce taux est alors de 6.41 [μg/mL]