

Combinatoire – TE 811A

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	1	2	5	13	7	28
Points obtenus						

Problème 1 (1 point)

De combien de manières peut-on asseoir six personnes sur un canapé de quatre places ?

$$A_4^6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Problème 2 (2 points)

Combien d'anagrammes différentes peut-on former avec les lettres du mot PATATE ?

$$\bar{P}_6(1 \times "P", 2 \times "A", 2 \times "T", 1 \times "E") = \frac{6!}{1 \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1} = 180$$

Problème 3 (5 points)

Combien de mots de quatre lettres peut-on écrire avec les lettres du mot AIMANTAS ?

AIMANTAS
8 lettres

⚠ 3x "A"

- Aucun A : $A_4^5 = 5! = 120$
- 1x "A" : $C_3^5 \cdot P_4 = 10 \cdot 24 = 240$
- 2x "A" : $C_2^5 \cdot \bar{P}_4(1,1,2) = 10 \cdot 12 = 120$
- 3x "A" : $C_1^5 \cdot \bar{P}_4(1,3) = 5 \cdot 4 = 20$

Total: $120 + 240 + 120 + 20 = 500$

Problème 4 (13 points)

Une classe est composée de 5 filles et 15 garçons. Alice et Bob sont deux élèves de cette classe.

- 1 a) Combien y a-t-il de possibilités de désigner parmi eux un comité formé d'un(e) président(e) et d'un(e) secrétaire ?

$$A_2^{20} = 20 \cdot 19 = \underline{380}$$

- 1 b) Combien y a-t-il de possibilités de désigner parmi eux un comité de 4 membres ?

$$C_4^{20} = \underline{4845}$$

- 1 c) Combien y a-t-il de possibilités de désigner parmi eux un comité de 6 membres comprenant 2 filles et 4 garçons ?

$$C_2^5 \cdot C_4^{15} = 10 \cdot 1365 = \underline{13650}$$

- 3 d) Combien y a-t-il de possibilités de désigner parmi eux un comité de 5 membres comprenant au moins 2 filles ?

$$\begin{aligned}
 & C_2^5 \cdot C_3^{15} + C_3^5 \cdot C_2^{15} + C_4^5 \cdot C_1^{15} + C_5^5 \\
 & = 10 \cdot 455 + 10 \cdot 105 + 5 \cdot 15 + 1 = \underline{5676}
 \end{aligned}$$

- 3 e) Combien y a-t-il de possibilités de désigner parmi eux un comité de 7 membres comprenant au plus 3 garçons ?

$$\begin{aligned}
 & C_4^5 \cdot C_3^{15} + C_5^5 \cdot C_2^{15} = 5 \cdot 455 + 1 \cdot 105 = 2275 + 105 \\
 & \quad \quad \quad \begin{matrix} 4F & 3G & 5F & 2G \end{matrix} \qquad \qquad \qquad = \underline{2380}
 \end{aligned}$$

- 3 f) Combien y a-t-il de possibilités de désigner parmi eux un comité de 5 membres composé de 2 filles et de 3 garçons sachant qu'Alice et Bob ne veulent pas siéger ensemble ?

- Nombre total de comités : $C_2^5 \cdot C_3^{15} = 10 \cdot 455 = 4550$
- A et B ensemble : $C_1^4 \cdot C_2^{15} = 4 \cdot 105 = 364$
- A et B ne siègent pas ensemble : $4550 - 364 = \underline{4186}$

Problème 5 (7 points)

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1	2	3
4	5	6
A	B	C

- 1 a) Combien de codes différents peut-on former ?
- 1 b) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
- 2 c) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
- 1 d) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
- 2 e) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exemple : A123

a) $3 \cdot 6^3 = 648$

b) $3 \cdot 5^3 = 375$

c) $648 - 375 = 273$

d) $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$

e) $648 - 360 = 288$