07.09.23

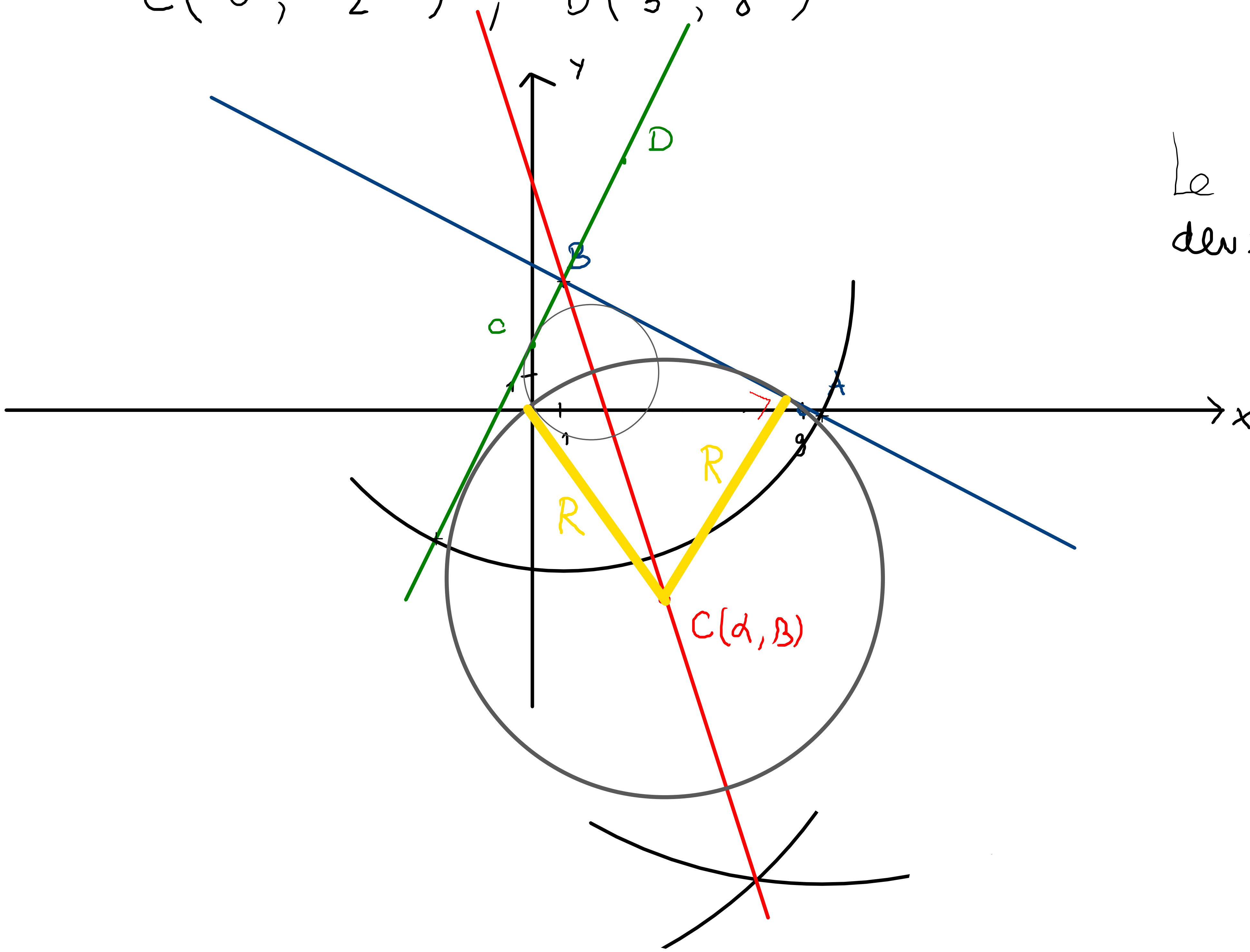
2.1.13 Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2y = 9$ et $y = 2x + 2$.

(d_1) : $x + 2y - 9 = 0$ $\qquad m_1 = \frac{-1}{2}$

$A(9\,;\,0)$, $B(1\,;\,4)$ $\qquad m_1 \cdot m_2 = -1 \quad d_1 \perp d_2$

(d_2) $2x - y + 2 = 0$ $\qquad m_2 = \frac{-2}{-1} = 2$

$C(0\,;\,2)$, $D(3\,;\,8)$



Le dessin montre les deux cercles cherchés

Nous devons déterminer la bissectrice de pente négative

Cherchons les bissectrices ;

$$\frac{x+2y-9}{\cancel{\sqrt{5}}_1} = \pm \frac{2x-y+2}{\cancel{\sqrt{5}}_1}$$

"+" : $x+2y-9 = 2x-y+2$

(b_1) : $-x+3y-11=0$

$m = \frac{1}{3}$ positive ☹

"−" : $x+2y-9 = -2x+y-2$

$(b) : 3x+y-7=0$ ☺ $m=-3$

Nous devons déterminer les deux centres.

Soit $C(\alpha, \beta)$ le centre cherché. C est sur b. Donc nous avons

$3\alpha + \beta - 7 = 0 \Rightarrow \beta = -3\alpha + 7$.

Le centre $C(\alpha, -3\alpha+7)$. On a la condition :

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \text{distance}(c, d_1) \qquad [= \text{Rayon du cercle}]$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3\alpha+7 \end{pmatrix}, \quad \|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{\alpha^2 + (-3\alpha+7)^2}$$

$(d_1) : x+2y-9=0$

$$\text{distance}(c, d_1) = \frac{|\alpha + 2(-3\alpha+7) - 9|}{\sqrt{5}} = \delta$$

On résout $\|\overrightarrow{OC}\|^2 = \delta^2$

$$\alpha^2 + (-3\alpha+7)^2 = \frac{(-5\alpha+5)^2}{5}$$

$$5\alpha^2 + 5(9\alpha^2 - 42\alpha + 49) = 25\alpha^2 - 50\alpha + 25 \qquad \Big| \div 5$$

$$\alpha^2 + 9\alpha^2 - 42\alpha + 49 = 5\alpha^2 - 10\alpha + 5$$

$$5\alpha^2 - 32\alpha + 44 = 0$$

$$(5\alpha - 22)(\alpha - 2) = 0$$

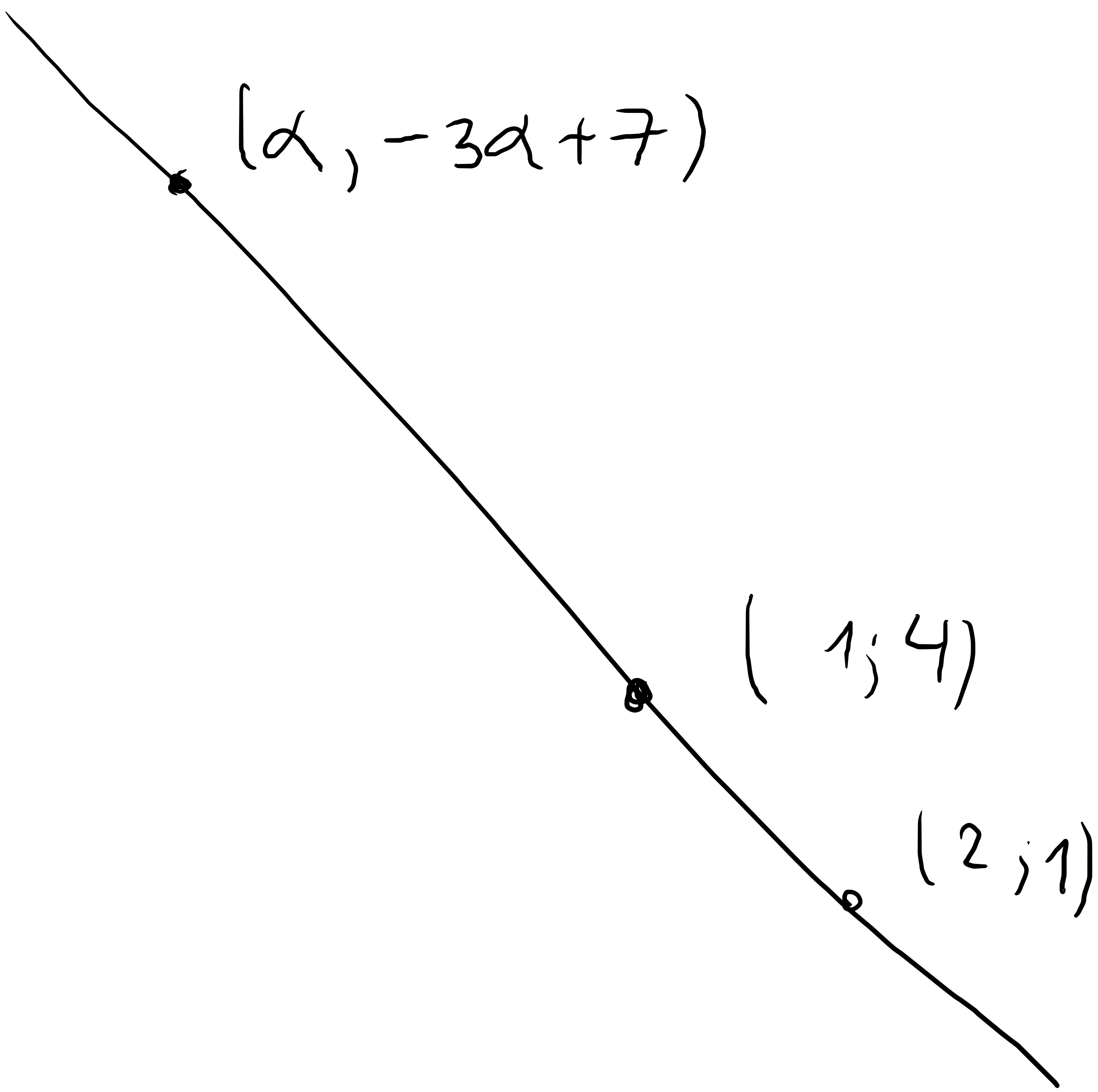
Les deux centres :

- $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et $R = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $\alpha = \frac{22}{5}$, $\beta = \frac{-31}{5}$ et $R = \frac{17}{\sqrt{5}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ \left(x - \frac{22}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{31}{5}\right) = \frac{289}{5} \end{array}}$$

$$(b):\ 3x + y - 7 = 0$$

$$y = -3x + 7$$



2.1.16 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle γ, Déterminer les équations des tangentes à γ au point T dans les cas suivants :

a) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2+y^2=5$; $\qquad (-1)^2+2^2 = 1+4 = 5$ ✓

b) $T(-5;7)$ et $\gamma : (x+2)^2+(y-3)^2=25$;

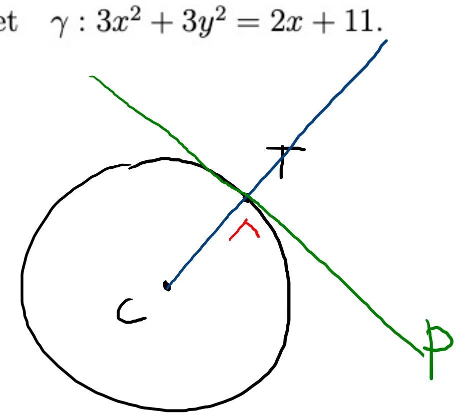
c) $T(0;0)$ et $\gamma : x^2+y^2=3x-7y$;

d) $T(-1;2)$ et $\gamma : x^2+y^2-2x+6y=19$;

e) $T(2;3)$ et $\gamma : 2x^2+2y^2=x+4y+12$;

f) $T(2;1)$ et $\gamma : 3x^2+3y^2=2x+11$.

a)



Centre $C(0;0)$, rayon : $\sqrt{5}$

1°) Droite CT :

$$\frac{y-0}{x-0} = \underbrace{\frac{2-0}{-1-0}}_{\text{pente}} = \frac{2}{-1}$$

$$y\cdot(-1) = 2x$$

$$-y = 2x \quad \Rightarrow \quad \boxed{(CT) : \ 2x+y=0}$$

équation du diamètre qui passe par T

1° bis)
$$\begin{cases} x = 0 - k & \cdot 2 \\ y = 0 + 2k & \cdot 1 \end{cases}$$
$$2x+y=0$$

$$\vec{CT} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

2°) Perpendiculaire à CT par T

$$(p) : \ x-2y+m=0$$

par T : $\ -1-4+m=0 \Rightarrow m=5$

$$\boxed{(p) : \ x-2y+5=0}$$

2° bis)
$$\begin{cases} x = -1+2k & \cdot 1 \\ y = 2+k & \cdot(-2) \end{cases}$$

$$(p) : \ x-2y=-5$$

b) $T(-5;7)$ et $\gamma : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$;

$C(-2;3)$ $r = 5$

$$\boxed{\frac{y-3}{x-(-2)} = \frac{7-3}{(-5)-(-2)} = \frac{4}{-3}}$$

$-3y + 9 = 4x + 8$

$4x + 3y - 1 = 0$

$\perp$ $3x - 4y + c = 0$

$3 \cdot -5 - 4 \cdot 7 + c = 0$

$-15 - 28 + c = 0$

$c = +43$

$3x - 4y + 43 = 0$

e) $T(2;3)$ et $\gamma : 2x^2+2y^2 = x+4y+12$;

f) $T(2;1)$ et $\gamma : 3x^2+3y^2 = 2x+11$.

$$2x^2 - x + 2y^2 - 4y = 12 \quad \Big| \div 2$$

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16} + y^2 - 2y + 1 = 6 + \tfrac{1}{16} + 1$$

$$\left(x - \tfrac{1}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{96+1+16}{16}$$

$$\left(x - \tfrac{1}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{113}{16}$$