11.01.24

1.1.29 La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique. Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h = \frac{40}{1 + 200\, e^{-0,2t}}$$

a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

$$h(t) = \frac{40}{1 + 200e^{-0,2t}} \qquad t \geq 0$$

a) $h(30) \cong 26,74 \quad [m]$

b)

$$\frac{40}{1 + 200 \cdot e^{-0,2t}} = 16 \qquad \Big| \cdot \left(1 + 200 \cdot e^{-0,2t}\right)$$

$$40 = 16\left(1 + 200\, e^{-0,2t}\right) \qquad \Big| \div 16$$

$$2,5 = 1 + 200 \cdot e^{-0,2t} \qquad \Big| - 1$$

$$1,5 = 200 \cdot e^{-0,2t} \qquad \Big| \div 200$$

$$0,0075 = e^{-0,2t}$$

$$\ln(0,0075) = \ln\left(e^{-0,2t}\right)$$

$$\ln(0,0075) = -0,2t \qquad \Big| \div (-0,2)$$

$$\ln(a^x) = x \ln(a)$$

$$\ln(e) = 1$$

$$t = 24,46 \quad [ans]$$

c) hauteur maximale :

$$h'(t) = \frac{-40 \cdot (-40\, e^{-0,2t})}{(1+200\, e^{-0,2t})^2} = \frac{1600\, e^{-0,2t}}{(1+200\, e^{-0,2t})^2}$$

$$h = \frac{40}{1+200\, e^{-0,2t}} = \frac{u}{v} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$u = 40$; $u' = 0$

$v = 1 + 200\, e^{-0,2t}$; $v' = 200 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) = -40\, e^{-0,2t}$

t		0	
$h'(t)$			$+$
$h(t)$		$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$

Il n'y a pas de max.

Min (0

$$h(0) = \frac{40}{1+200} = \frac{40}{201} \cong \frac{40}{200} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$= 0,2$ [m]

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{40}{1 + 200\, \underbrace{e^{-0,2t}}_{\to 0}} = \frac{40}{1} = 40 \text{ [m]}$$