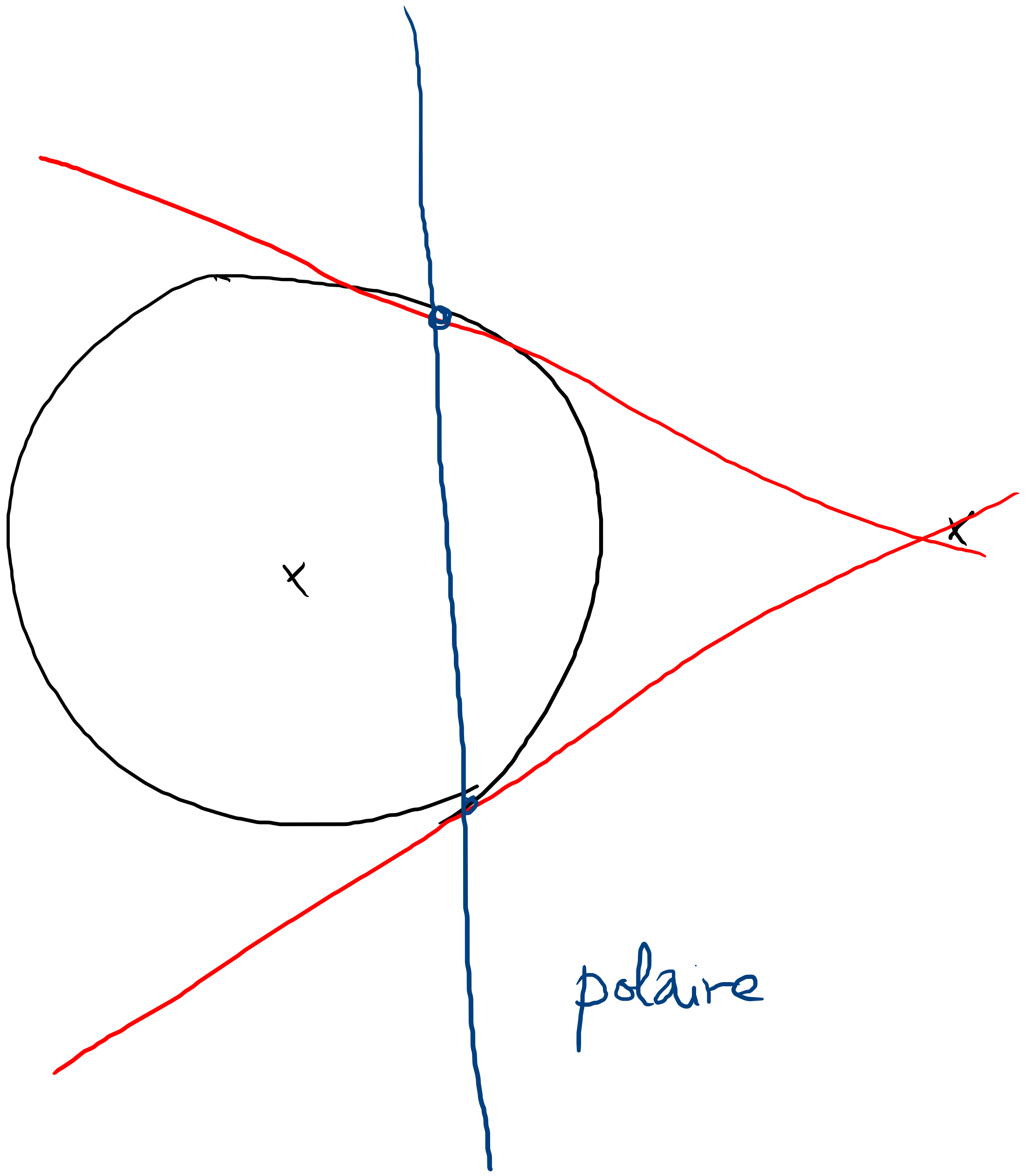
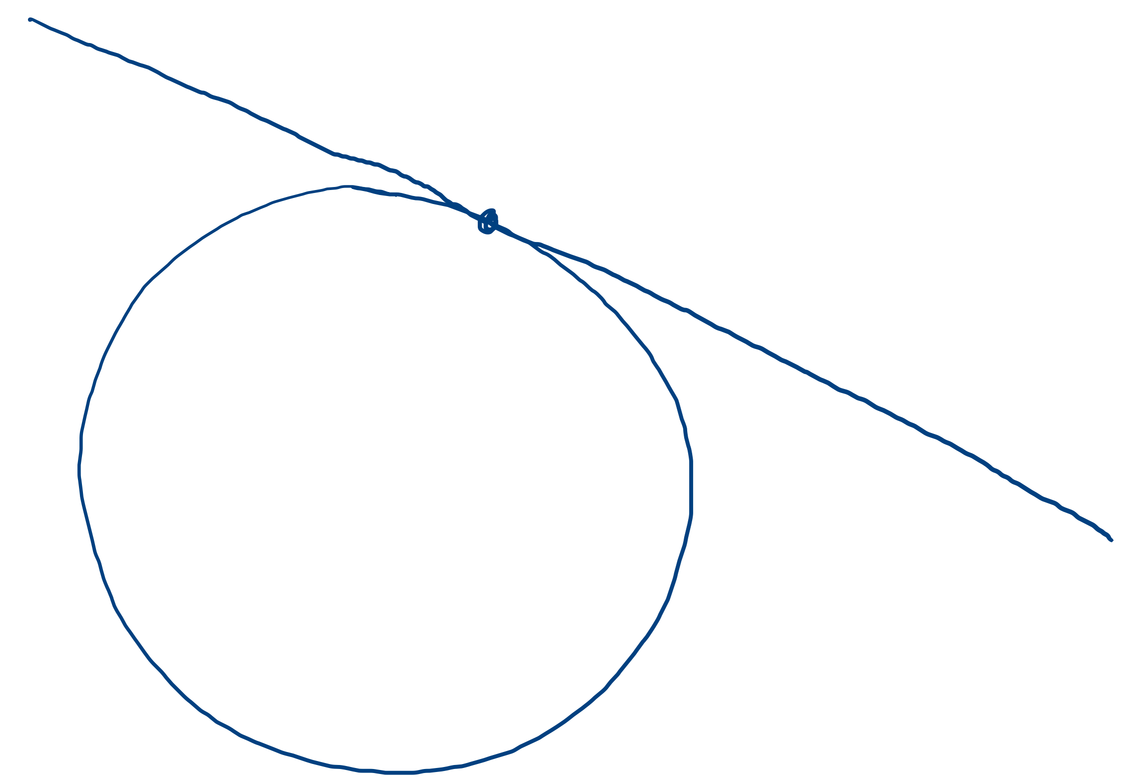
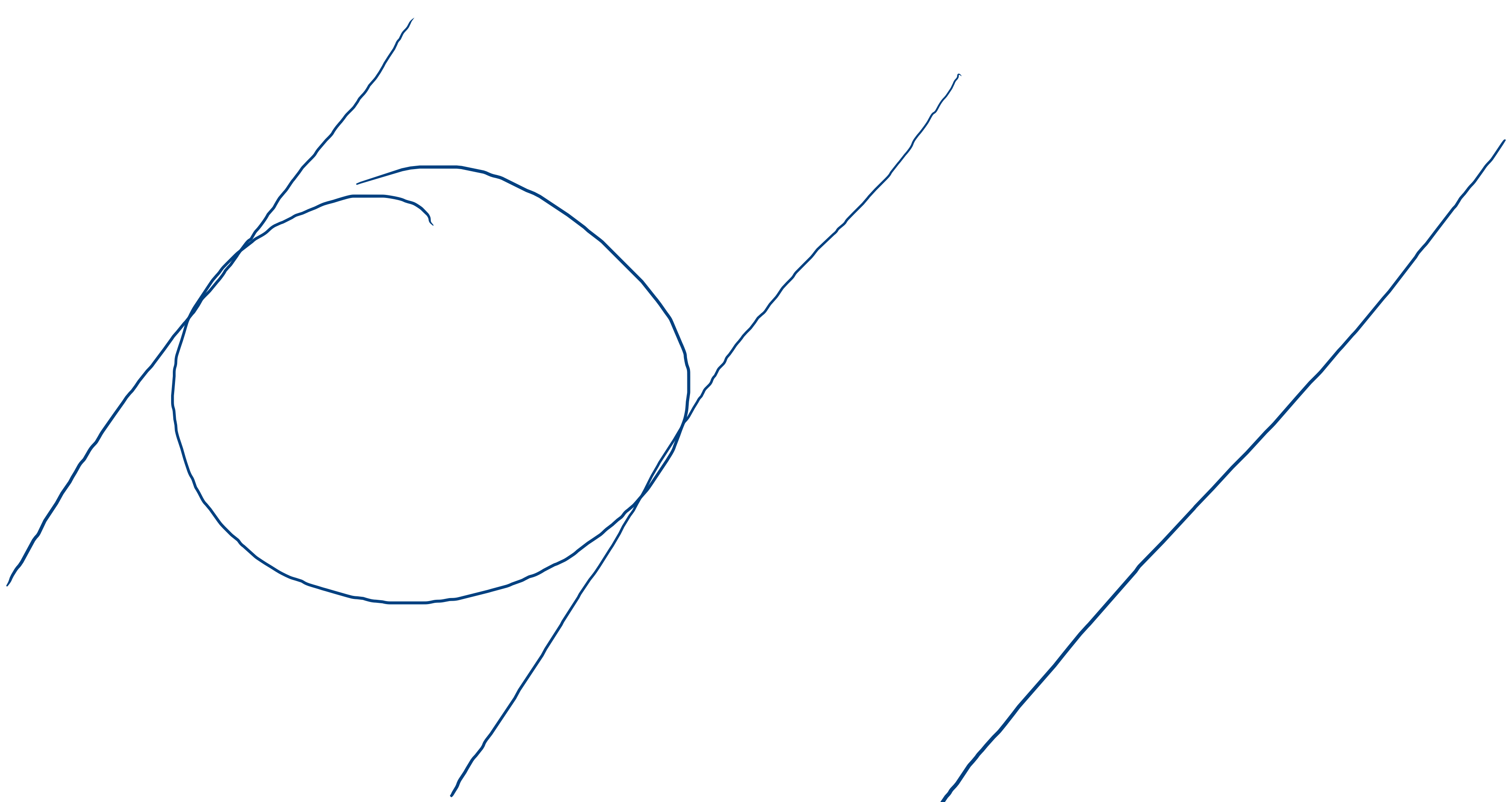
13.09.23

Polaire







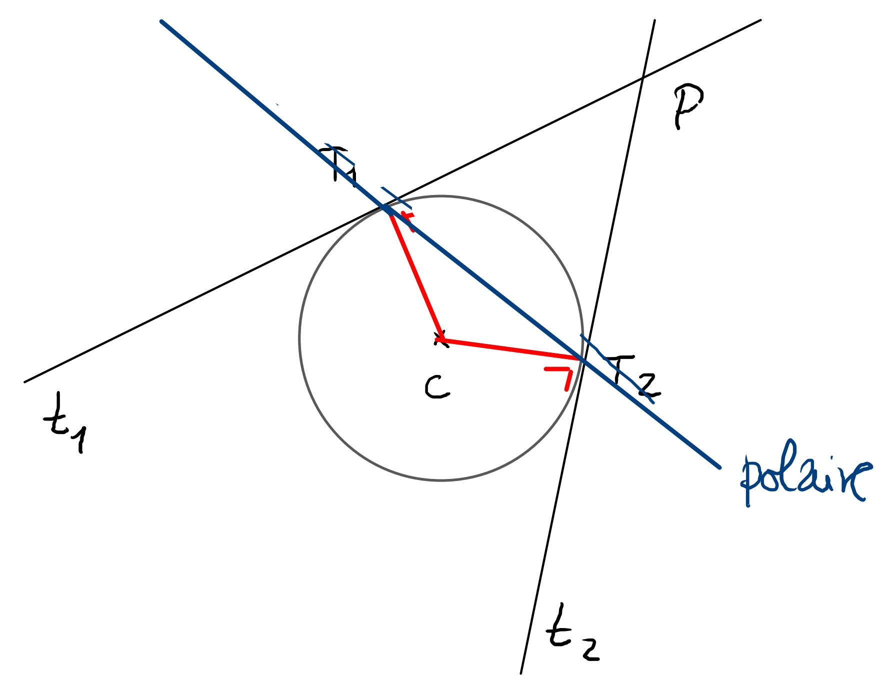
Exemple

Tangentes à un cercle par un point extérieur au cercle

$(\gamma): (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$

centre $C(4;-1)$ et $r = \sqrt{5}$

Point $P(9;4)$ extérieur à γ.



1) Avec la polaire

$(\gamma): (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$

γ dédoublée : $(x-4)(x-4) + (y+1)(y+1) = 5$

polaire (T_1T_2) : $5(x-4) + 5(y+1) = 5 \quad | \div 5$

$x - 4 + y + 1 = 1$

(T_1T_2): $x + y - 4 = 0$

Déterminons les points de contact T_1 et T_2 :

$$\begin{cases} (\gamma): & (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5 \\ (T_1T_2): & y = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (-x+5)^2 = 5 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

On résout la première équation de ce système :

$x^2 - 8x + 16 + x^2 - 10x + 25 = 5$

$2x^2 - 18x + 36 = 0 \quad | \div 2$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x-3)(x-6) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$$

$T_1(3;1)$ et $T_2(6;-2)$

Déterminons les tangentes :

(T_1P) :

$T_1(3,1)$

$P(9,4)$

$$\frac{y-1}{x-3} = \frac{4-1}{9-3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$1(x-3) = 2(y-1)$$

$$\boxed{(T_1P) : \quad x - 2y - 1 = 0}$$

(T_2P) :

$T_2(6;-2)$

$P(9;4)$

$$\frac{y+2}{x-6} = \frac{4+2}{9-6} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$$

$$2(x-6) = 1(y+2)$$

$$\boxed{(T_2P) : \quad 2x - y - 14 = 0}$$

2) Avec les pentes

Formulaire page 51 $\quad y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2+1}$, $C(4;-1)$, $r = \sqrt{5}$

$$C(\underset{c_1}{4};\underset{c_2}{-1})$$

Les tangentes ont pour équation :

$$y + 1 = m(x-4) \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$$

Les tangentes passent par $P(9;4)$:

$$
\begin{aligned}
5 &= m \cdot 5 \pm \sqrt{5}\sqrt{m^2+1} && \mid -5m\\
5 - 5m &= \pm\sqrt{5}\sqrt{m^2+1} && \mid (\ )^2\\
25 - 50m + 25m^2 &= 5(m^2+1) &&\\
25 - 50m + 25m^2 &= 5m^2 + 5 && \mid -5m^2 - 5\\
20m^2 - 50m + 20 &= 0 && \mid \div 10\\
2m^2 - 5m + 2 &= 0 &&\\
(2m-1)(m-2) &= 0 &&
\end{aligned}
$$

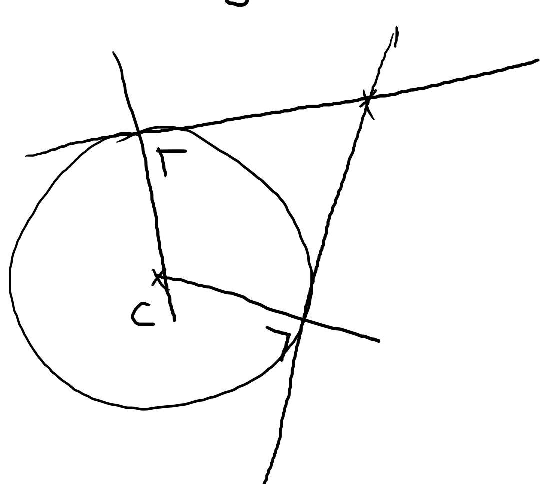
$\dots = \sqrt{\ }$

On a les pentes des tangentes $m_1 = \frac{1}{2}$ et $m_2 = 2$

Puis, on a les tangentes

(T_1P) : $\dfrac{y-4}{x-9} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x - 9 = 2y - 8 \Rightarrow \boxed{x - 2y - 1 = 0}$

(T_2P) : $\dfrac{y-4}{x-9} = 2 \Rightarrow 2x - 18 = y - 4 \Rightarrow \boxed{2x - y - 14 = 0}$



Pour trouver les points de contact on cherche les rayons perpendiculaires, puis on résout les deux systèmes