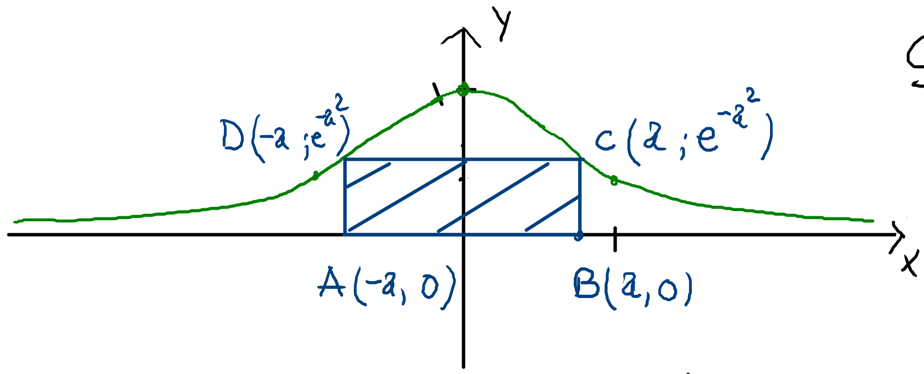
1.1.19 Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur Ox, alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.



$f(x) = e^{-x^2}$ est paire, donc symétrique par rapport à Oy.

Soit $a > 0$. Posons $B(a,0)$, on a $C(a, e^{-a^2})$, $D(-a\,; e^{-a^2})$ et $A(-a, 0)$

Donc l'aire du rectangle est égale à $AB \times BC = 2a \cdot e^{-a^2}$.

On cherche la max de $A(a) = \underbrace{2a}_{u} \cdot \underbrace{e^{-a^2}}_{v}$

$u' = 2$; $v = e^{-a^2} \cdot (-a^2)' = -2a \cdot e^{-a^2}$

$$A'(a) = 2e^{-a^2} + 2a \cdot (-2a\, e^{-a^2}) = 2e^{-a^2} - 4a^2 e^{-a^2}$$
$$= 2e^{-a^2}(1 - 2a^2)$$

zéros de $A'(a)$: $1 - 2a^2 = 0 \iff a^2 = \frac{1}{2} \iff a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

a	$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
$A'(a)$			‖	$+$	0	$-$
$A(a)$			‖	↗	max	↘

Le max est atteint pour $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Les sommets : $A(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$, $B(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$, $C(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$ et $D(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

1.1.27

1.1.27 Une étude a montré que l'indice de satisfaction (sur une échelle de 1 à 10) des clients abonnés à un service Internet était donné par la fonction s définie par

$$s(t) = \frac{20\ln(t+1)+t}{t+1} \qquad t \geq 1$$

où t représente le nombre de mois écoulés depuis le début de l'abonnement (cette fonction n'est valable qu'à partir de la fin du 1[er] mois).

a) Quel est l'indice de satisfaction après 5 mois d'abonnement (réponse à deux décimales) ?

$$s(5) \cong 6{,}8$$

b) Si l'abonnement est conclu le 1[er] janvier, au cours de quel mois l'indice de satisfaction est-il maximal ?

$$S(t) = 10 \iff \frac{20\ln(t+1)+t}{t+1} = 10$$

$$s'(t) = \frac{\frac{t+21}{\cancel{t+1}}\cdot(\cancel{t+1}) - (20\ln(t+1)+t)\cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{\frac{t+21}{\cancel{t+1}}\cdot(\cancel{t+1}) - \left(20\ln(t+1)+t\right)1}{(t+1)^2}$$

$$u = 20\ln(t+1) + t \; ; \; u' = 20\cdot\frac{1}{t+1} + 1 = \frac{20}{t+1} + 1 = \frac{20+t+1}{t+1} = \frac{t+21}{t+1}$$

$$v = t+1 \; ; \; v' = 1$$

$$= \frac{t+21-20\ln(t+1)-t}{(t+1)^2} = \frac{21-20\ln(t+1)}{(t+1)^2} \qquad t > 1$$

zéro de $s'(t)$:

$$21 - 20\ln(t+1) = 0$$
$$21 = 20\ln(t+1) \qquad \div 20$$
$$\frac{21}{20} = \ln(t+1)$$
$$e^{1{,}05} = t+1$$
$$t = e^{1{,}05} - 1$$
$$t \cong 1{,}86$$

Tableau de la croissance :

t		1		1,86	
$s'(t)$	//////	|	$+$	0	$-$
$s(t)$	//////	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$	max	$\searrow$

le max est atteint lorsque $s \cong 2$

c) Calculer $\lim_{t \to +\infty} s(t)$.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{20\ln(t+1)+t}{t+1} \underset{\frac{"+\infty"}{+\infty}}{\overset{BH}{=}} \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{t+21}{t+1}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

L'indice de satisfaction tend vers 1