23.11.23

1.3.7 Trouver l'expression mathématique de la fonction f, sachant que :

a) $f'(x) = 3x^2 - 4$, $f(5) = 54$;

b) $f''(x) = (x+1)(x-2)$, $f(1) = 8$, $f'(0) = 37/6$;

c) $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(9) = 2$, $f(1) = 2f(4)$.

b) $f''(x) = x^2 - x - 2$

a) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (3x^2-4)\,dx = x^3 - 4x + c$

Déterminons la constante c avec $f(5) = 54$.

$f(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 + c = 125 - 20 + c = 105 + c \Rightarrow 105 + c = 54$

$c = -51$

$$\underline{f(x) = x^3 - 4x - 51}$$

b) $f'(x) = \int (x^2 - x - 2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$

Déterminons la constante c avec $f'(0) = \frac{37}{6} \Rightarrow c = \frac{37}{6}$

$f(x) = \int \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{37}{6}\right) dx = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - x^2 + \frac{37}{6}x + d$

Déterminons la constante d avec $f(1) = 8$.

$\frac{1}{12} - \frac{1}{6} - 1 + \frac{37}{6} + d = 8 \quad \Rightarrow \quad d = 8 - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 1 - \frac{37}{6}$

$$d = \frac{96 - 1 + 2 + 12 - 74}{12}$$

$$d = \frac{35}{12}$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^6 - x^2 + \frac{37}{6}x + \frac{35}{12}}$$

c) $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(9) = 2$, $f(1) = 2f(4)$.

① $f'(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\, x^{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{x} + c$

Déterminons c avec $f'(9) = 2$.

$f'(9) = 2\cdot\sqrt{9} + c = 6 + c \Rightarrow 6 + c = 2 \Rightarrow c = -4 \Rightarrow f'(x) = 2\sqrt{x} - 4$

② $f(x) = \int (2\sqrt{x} - 4)\,dx = \int (2x^{\frac{1}{2}} - 4)\,dx = 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4x + d = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + d$

Déterminons d.

$f(1) = \frac{4}{3} - 4 + d = \frac{4}{3} - \frac{12}{3} + d = d - \frac{8}{3}$

$f(4) = \frac{4}{3}\underbrace{\sqrt{4^3}}_{8} - 4\cdot 4 + d = \frac{32}{3} - 16 + d = \frac{32}{3} - \frac{48}{3} + d = d - \frac{16}{3}$

Donc $d - \frac{8}{3} = 2\left(d - \frac{16}{3}\right)$

$d - \frac{8}{3} = 2d - \frac{32}{3}$

$-d = -\frac{32}{3} + \frac{8}{3}$

$d = 8$

$f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + 8$

1.3.8 Déterminer la primitive F de chaque fonction f ci-dessous, en tenant compte des conditions imposées.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ et le terme constant de F est égal à 7 ;

b) $f(x) = \frac{18}{x^2} + \sqrt{x}$ et le graphe de F passe par le point $(9; 16)$;

$$\boxed{n \neq -1 \quad \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c}$$

a) $F(0) = 7$

$$F(x) = \int (3x^2 - 6x)\, dx = x^3 - 3x^2 + \underbrace{c}_{7} = x^3 - 3x^2 + 7$$

b) $$F(x) = \int \left(\frac{18}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx = \int \left(18x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= 18 \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 18 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} + \frac{2}{3} x^{3/2} + c = -18 \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$F(9) = 16 \Rightarrow -18 \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \sqrt{9^3} + c = -2 + \frac{2}{3} \cdot 27 + c$$

$$= -2 + 18 + c = c + 16$$

Donc $c + 16 = 16 \Rightarrow c = 0$

$$F(x) = \frac{-18}{x} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$$

Intégrale des fonctions exp et log

$$\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + c$$

<u>Rappel</u> : $\left(e^{2x}\right)' = e^{2x} \cdot \underbrace{(2x)'}_{2} = 2\, e^{2x}$

1.1.3 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2e^x$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = 2 - e^x$

d) $f(x) = e^{2-x}$

a) $\int 2e^x \, dx = 2\int e^x \, dx = 2e^x + c$

b) $\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

candidat : $K \cdot e^{2x}$

$(\text{candidat})'$: $K \cdot e^{2x} \cdot (2x)' = K e^{2x} \cdot 2 = 2K e^{2x}$

$\Rightarrow 2K = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}$

c) $\int (2 - e^x) dx = 2 - e^x + c$

d) $\int e^{2-x} \, dx = -e^{2-x} + c$