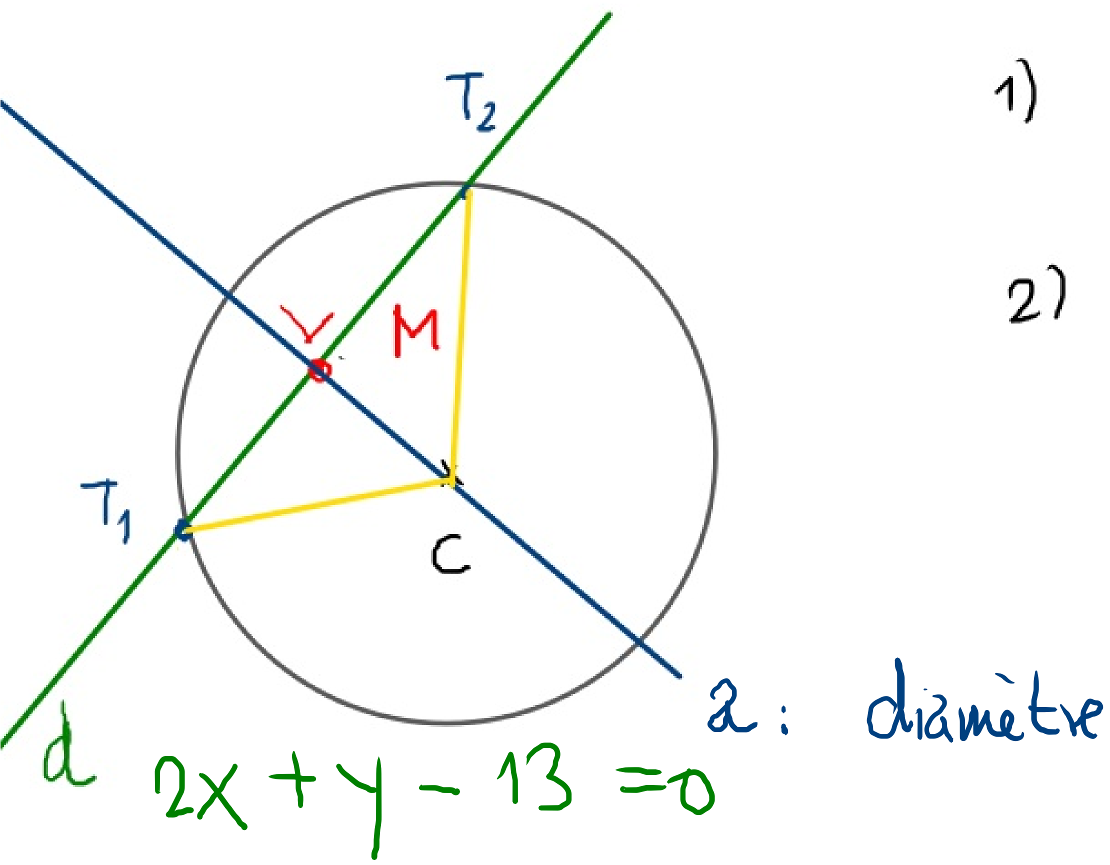
31.08.23

2.1.7 Déterminer l'équation du diamètre du cercle $\gamma : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ qui passe par le point milieu de la corde de support $d : 2x + y = 13$.



1) Cercle : $C(2;-1)$ et $r = 5$

2) $(d) : 2x + y - 13 = 0$

$$\text{distance}(d, C) = \frac{|2.2 - 1(-1) - 13|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} < 5$$

Le diamètre cherché est perpendiculaire à d passant par C.

$(a) : \quad x - 2y + m = 0$

a par C : $\quad 2 - 2\cdot(-1) + m = 0 \Rightarrow m = -4$

$$\boxed{(d) : \quad x - 2y - 4 = 0}$$

2.1.8 Calculer la longueur de la corde commune aux cercles $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 10\,x + 10\,y$ et $\gamma_2 : x^2 + y^2 + 6\,x + 2\,y = 40$.

(γ_1): $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 0 + 25 + 25$

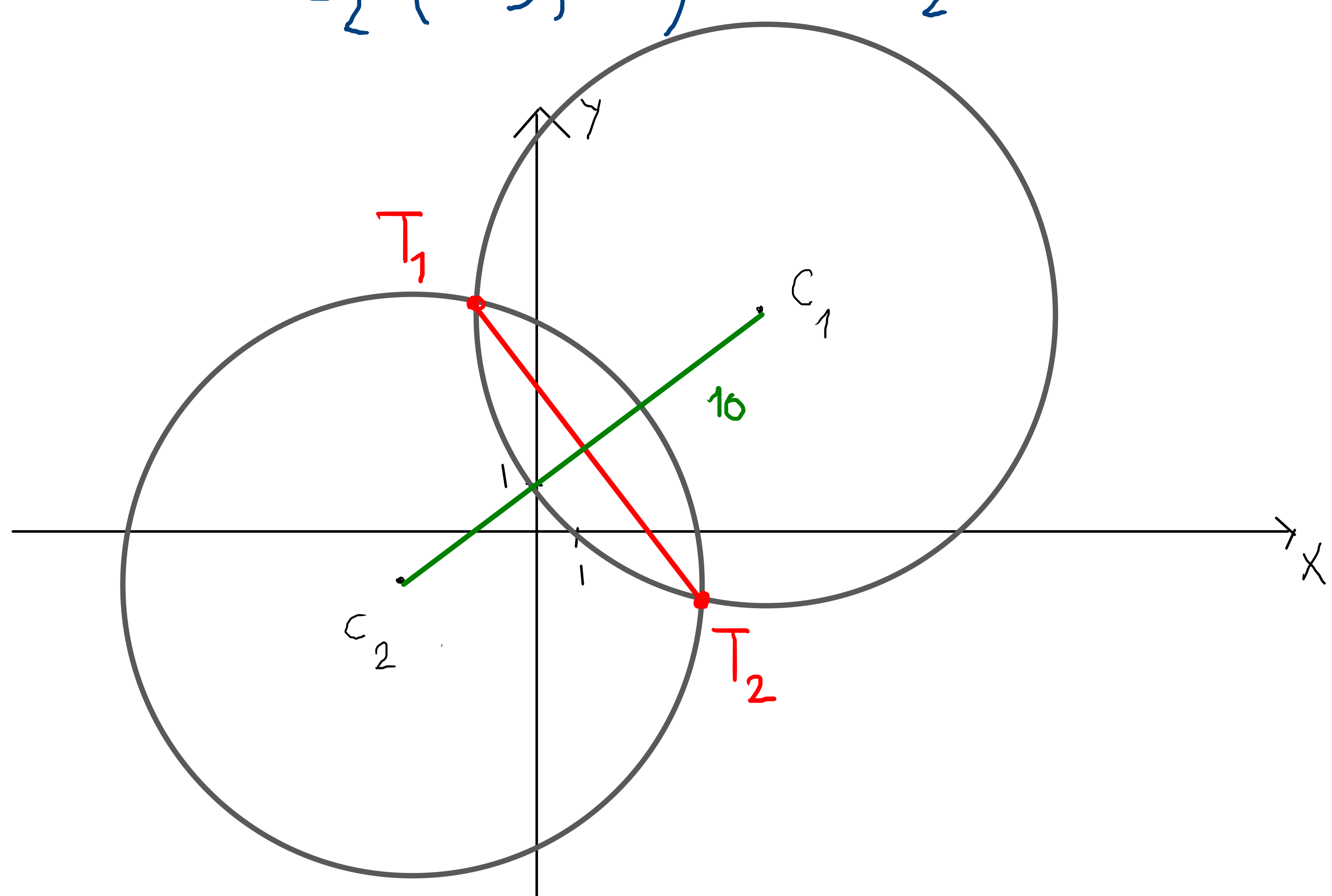
$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 50$

$C_1(5;5)$, $r_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(γ_2): $x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 40 + 9 + 1$

$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 50$

$C_2(-3;-1)$ $r_2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$



Ces cercles se coupent-ils ?

$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = 10 < 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

Oui, ils se coupent

Déterminons les points d'intersection T_1 et T_2

$$\begin{array}{l} (\gamma_1): \\ (\gamma_2): \end{array} \begin{cases} x^2+y^2-10x-10y=0 \\ x^2+y^2+6x+2y=40 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} (T_1T_2): \\ (\gamma_2): \end{array} \begin{cases} 16x+12y=40 & \mid \div 4 \\ x^2+y^2+6x+2y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y=10 \\ x^2+y^2+6x+2y=40 \end{cases}$$

On résout par substitution

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10-4x}{3} \\ x^2 + \left(\dfrac{10-4x}{3}\right)^2 + 6x + 2\cdot\dfrac{10-4x}{3} = 40 \end{cases}$$

Résolvons la $2^{\text{ème}}$ équation :

$$x^2 + \frac{100-80x+16x^2}{9} + 6x + \frac{20-8x}{3} = 40 \quad \Big| \cdot 9$$

$$\underline{9x^2} + 100 - \underline{80x} + \underline{16x^2} + \underline{54x} + 60 - \underline{24x} = 360$$

$$25x^2 - 50x - 200 = 0 \quad \Big| \div 25$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x-4)(x+2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{llll} x = 4 & , \; y = \dfrac{10-16}{3} = \dfrac{-6}{3} = -2 & \Rightarrow & T_1(4\,;-2) \\ \text{ou} & & & \\ x = -2 & , \; y = \dfrac{10+8}{3} = \dfrac{18}{3} = 6 & \Rightarrow & T_2(-2\,;6) \end{array}\right.$$

La longueur de la corde :

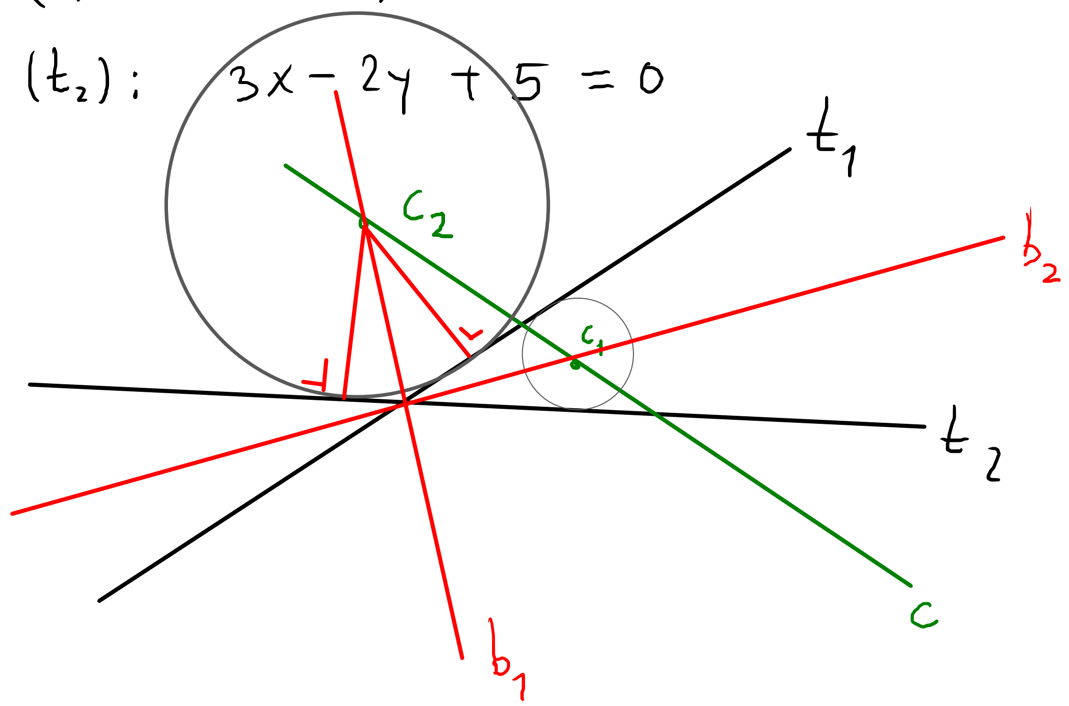
$$\overrightarrow{T_1T_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \left\| \overrightarrow{T_1T_2} \right\| = 10$$

2.1.9 Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4x - 5y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites $2x = 3y + 10$ et $2y = 3x + 5$.

$(c): \quad 4x - 5y - 3 = 0$

$(t_1): \quad 2x - 3y - 10 = 0$

$(t_2): \quad 3x - 2y + 5 = 0$



Bissectrices

$$\frac{2x - 3y - 10}{\cancel{\sqrt{13}}} = \pm \frac{3x - 2y + 5}{\cancel{\sqrt{13}}}$$

1er cas : (b_1) $2x - 3y - 10 = 3x - 2y + 5$

$$\begin{array}{ll|c|c} & & x & y \\ (b_1): & \left\{\begin{array}{l} x + y + 15 = 0 \\ 4x - 5y - 3 = 0 \end{array}\right. & \cdot 4 & 5 \\ (c): & & \cdot(-1) & 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9y + 63 = 0 \\ 9x + 72 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -7 \\ x = -8 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow C_1(-8; -7)$$

Pour calculer le rayon, on calcule la distance du centre à t_1

$$\text{distance}(C_1, t_1) = \frac{|2\cdot(-8) - 3\cdot(-7) - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

$(t_1): \ 2x - 3y - 10 = 0$

$$\boxed{(\gamma_1): \quad (x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}}$$

2ème cas : $2x - 3y - 10 = -(3x - 2y + 5)$

$(b_2): \quad 2x - 3y - 10 = -3x + 2y - 5$

$\qquad 5x - 5y - 5 = 0$

$$\begin{array}{ll|c|c} (b_2): & \left\{\begin{array}{l} x - y - 1 = 0 \\ 4x - 5y - 3 = 0 \end{array}\right. & \cdot 4 & \cdot 5 \\ (c): & & \cdot(-1) & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$C_2(2; 1)$$

$$\text{distance}(C_2, t_1) = \frac{|4 - 3 - 10|}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$(\gamma_2): \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}$$

2.1.10 Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2x + y = 0$, est tangent aux droites $3y = 4x + 10$ et $4x = 3y + 30$.

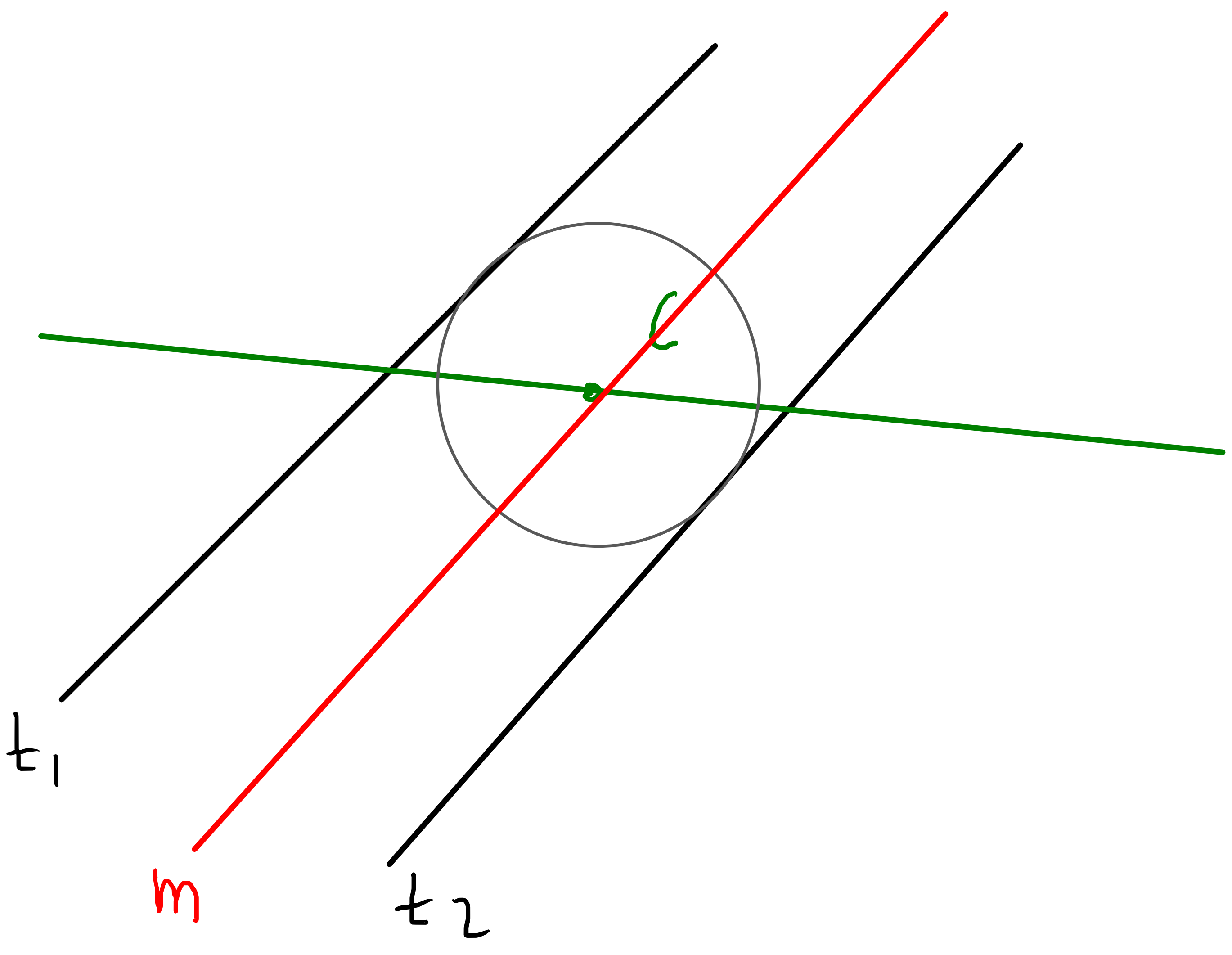
$(c) : 2x + y = 0$

$(t_1) : 4x - 3y + 10 = 0$

$(t_2) : 4x - 3y - 30 = 0$

$t_1 \parallel t_2$

$(m) : 4x - 3y - 10 = 0$



distance : $= \dfrac{|4 + 6 + 10|}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{20}{\sqrt{25}} = \dfrac{20}{5} = 4$

intersection : $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x \\ 4x - 3(-2x) = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x \\ 10x = 10 \end{cases}$

$x = 1$

$y = -2$

$C(1; -2)$

equation : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$