Algèbre linéaire – La diagonalistion

Exercice 1

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f : (x, y, z) \to (3\,x - z, 2\,x + 4\,y + 2\,z, -x + 3\,z)$$

a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer le polynôme caractéristique de f. En déduire les valeurs propres de f.

c) Déterminer une base pour chaque espace propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

d) Trouver une matrice P telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\mathrm{D}\,\mathrm{P}^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on explicitera.

e) Déterminer la matrice A^n, pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 2

Diagonaliser les matrices suivantes, lorsque cela est possible.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la matrice A soit diagonalisable :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Exercice 1

a) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $$C_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & -1 \\ 2 & 4-t & 2 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= (4-t) \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = (4-t)\left[(3-t)^2 - 1 \right]$$

$$= (4-t)(2-t)(4-t) = -(t-4)^2(t-2)$$

On a deux valeurs propres : 4 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.

c) E_2 : $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \Rightarrow E_2 = \langle \left((1, -2, 1) \right) \rangle$$

E_4 : $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + z = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_4 = \langle \big((1,0,-1),\ (0,1,0) \big) \rangle$$

Comme $\dim(E_2) =$ multiplicite (4), l'endomorphisme est diagonalisable.

d) $B^* = \big((1,-2,1), (1,0,-1), (0,1,0) \big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, B) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3, B) \\ P \uparrow & & \downarrow P^{-1} \\ (\mathbb{R}^3, B^*) & \xrightarrow{A^*} & (\mathbb{R}^3, B^*) \end{array}$$

Ici, $D = A^*$ et $A = P A^* P^{-1}$

e) $A^n = P {A^*}^n P^{-1}$

Calculons P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 4^n & 0 & -4^n \\ 2\cdot 4^n & 2\cdot 4^n & 2\cdot 4^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ -2^{n+1} + 2\cdot 4^n & 2\cdot 4^n & -2^{n+1} + 2\cdot 4^n \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 2^{2n} & 0 & 2^n - 2^{2n} \\ -2^{n+1} + 2^{2n+1} & 2^{2n+1} & -2^{n+1} + 2^{2n+1} \\ 2^n - 2^{2n} & 0 & 2^n + 2^{2n} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2^n \begin{pmatrix} 1 + 2^n & 0 & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} & 2^{n+1} - 2 \\ 1 - 2^n & 0 & 1 + 2^n \end{pmatrix}$$

$$= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 + 2^n & 0 & 1 - 2^n \\ 2(2^n - 1) & 2^{n+1} & 2(2^n - 1) \\ 1 - 2^n & 0 & 1 + 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$C_A(t) = -(t-1)(t+2)^2$ diagonalisable

$C_B(t) = -(t-1)(t+1)(t-3)$ diagonalisable

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

1°) Si $c = 1$ $\Rightarrow$ $C_A(t) = -(t-1)^3$ et $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\exists\, P \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tq

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas possible car $A \neq I_3$

Donc $c \neq 1$

2°) $c \neq 1$:

$\dim(E_1) = 2$ et $\dim(E_c) = 1$

E_1 : $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$

donc $E_1 = \langle \big((a,0,0), (1,b,c-1) \big) \rangle$ si et seulement si $a \neq 0$.

En conclusion, A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$ et $c \neq 1$