Algèbre linéaire – Les espaces vectoriels

Exercice 1

Soit une loi $\oplus$ qui opère sur deux éléments de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \oplus \,:\, & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (a,b) \mapsto 2\,a + 3\,b \end{aligned}$$

Calculer :

a) $5 \oplus -3$

b) $-3 \oplus 5$

c) $0 \oplus 4$

d) $1 \oplus 4$

e) $(1 \oplus 2) \oplus 3$

f) $1 \oplus (2 \oplus 3)$

g) $\oplus$ est-elle commutative ?

h) $\oplus$ est-elle associative ?

Exercice 2

Soit une loi $\oplus$ qui opère sur deux éléments de $\mathbb{E}$.
Pour les exemples suivants, déterminer deux éléments u et v de $\mathbb{E}$, puis calculer $u \oplus v$.

a) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ et $\oplus$ est l'addition usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

b) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ et $(x\,,\,y) \oplus (x'\,,\,y') = (x + y'\,,\,x' + y)$.

c) $\mathbb{E} = \mathrm{V}^2$ et $\oplus$ est le produit scalaire.

d) $\mathbb{E} = \mathrm{V}^2$ et $u \oplus v = ||u|| \cdot u + ||v|| \cdot v$.

e) $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et $u \oplus v = u\,v + (u^2 - 1)(v^2 - 1)$.

Exercice 3

Soit la loi $\odot$ qui opère sur un élément de $\mathbb{R}$ et sur un élément d'un ensemble $\mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} \odot \,:\, & \mathbb{R}\times\mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ & (\lambda,u) \mapsto \lambda \odot u \end{aligned}$$

a) Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et $\lambda \odot u = \lambda \cdot 2\,u$, calculer $-3 \odot 5$.

b) Si $\mathbb{E} = \mathrm{V}^2$ et $\lambda \odot u = \lambda \cdot u$, calculer $-3 \odot (-5\,,2)$.

c) Si $\mathbb{E} = \mathrm{V}^2$ et $\lambda \odot u = \lambda \cdot u + u$, calculer $-3 \odot (-5\,,2)$.

Exercice 4

Soit la loi $\otimes$ qui opère sur deux éléments de $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\otimes : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

$$(a,b) \otimes (x,y) = (ax - by, ay + bx)$$

et la loi $\odot$ qui opère sur un élément de $\mathbb{R}$ et sur un élément d'un ensemble $\mathbb{E}$:

$$\lambda \odot (a,b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Calculer :

a) $(1,0) \otimes (1,0)$
b) $(1,0) \otimes (0,1)$
c) $(0,1) \otimes (0,1)$
d) $(0,1) \otimes (1,0)$
e) $(1,1) \otimes (1,1)$
f) $(3,-4) \otimes (-2,1)$
g) $(3,-4) \otimes (3,-4)$
h) $(3,-4) \otimes (3,4)$
i) $(5,12) \otimes (-5,12)$
j) $-2 \odot (-5,12)$
k) $\frac{1}{25} \odot ((3,-4) \otimes (3,4))$
l) $\Big(-1 \odot \big((0,-2) \otimes (2,1)\big)\Big) \otimes (-2,-4)$
m) $\otimes$ est-elle commutative ?
n) $\otimes$ est-elle associative ?
o) Quel est l'élément neutre de $\otimes$?
p) Quel est l'élément inverse de (a,b) pour $\otimes$?

Exercice 5

Soit $\mathbb{V} = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\mathbb{V}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ à l'aide des deux lois décrites ci-dessous.

a) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ et $k \cdot (a,b) = (k\,a, b)$.
b) $(a,b) + (c,d) = (a,b)$ et $k \cdot (a,b) = (k\,a, k\,b)$.
c) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ et $k \cdot (a,b) = (k^2\,a, k^2\,b)$.
d) $(a,b) + (c,d) = (a+d, b+c)$ et $k \cdot (a,b) = (k\,a, k\,b)$.

Exercice 6

Soit (E, +, ·) un espace vectoriel. On note 0_{E} l'élément neutre de (E, +).
Pour tout x dans E, le symétrique de x est noté $-x$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $x + x = 2 \cdot x$.
b) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $0 \cdot x = 0_{\mathrm{E}}$.
c) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $(-1) \cdot x = -x$.