1.2.27 Soit $(e_1; e_2; e_3; e_4)$ une base d'un espace vectoriel E. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel U de E engendré par les quatre vecteurs :

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4 \qquad u_2 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$$

$$u_3 = 3e_1 + 7e_2 + e_4 \qquad u_4 = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$$

Extraire de la famille $(u_1; u_2; u_3; u_4)$ une base de U.

On écrit u_i, $1 \leq i \leq 4$, dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i \leq 4}$.

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La dimension du sev $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ est le rang de la matrice dont les lignes sont les vecteurs ("vecteurs lignes") u_1 à u_4

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\ L_1 \leftarrow -L_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est sous forme échelonnée (pas réduite).

Le rang de cette matrice est égal à 2, donc la

dimension de $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ est égal à 2.
Comme u_1 et u_2 sont linéairement indépendants, la famille $\mathcal{B}_u = (u_1, u_2)$ est une base de U.