1.2.28 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c, d sont des nombres réels. Calculer la dimension du sous-espace

$$H = \langle \underbrace{4x^2 - x + 2}_{p_1}; \underbrace{2x^2 + 6x + 3}_{p_2}; \underbrace{-4x^2 + 10x + 2}_{p_3} \rangle$$

dans P_3.

Une base de P_3 : $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$. On a $\dim(P_3) = 4$.

On calcule le rang de la matrice dont les lignes sont composées par les vecteurs p_1, p_2 et p_3 exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & -4 \\ 0 & 0 & 22 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 22 \cdot L_2 \\ L_3 \leftarrow 13 \cdot L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -286 & -88 \\ 0 & 0 & 286 & 104 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -286 & -88 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{13} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est égal à 3. Donc la dimension de H est égal à 3.