1.2.32 Dans l'espace vectoriel réel $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle, on considère les deux sous-ensembles :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$

a) Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Montrons que $T + S \in \mathcal{A}$ et $\alpha T \in \mathcal{A}$

$$T+S = \begin{pmatrix} 0 & t+s \\ -t-s & 0 \end{pmatrix} \underset{k=t+s}{=} \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

$$\alpha T = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ -\alpha t & 0 \end{pmatrix} \underset{k=\alpha t}{=} \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est un sev de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Soit $T = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} d & e \\ e & f \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Montrons que $T + S \in \mathcal{S}$ et $\alpha T \in \mathcal{S}$

$$T+S = \begin{pmatrix} a+d & c+e \\ c+e & b+f \end{pmatrix} \underset{k=c+e}{=} \begin{pmatrix} a+d & k \\ k & b+f \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$$

$$\alpha T = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha c & \alpha b \end{pmatrix} \underset{k=\alpha c}{=} \begin{pmatrix} \alpha a & k \\ k & \alpha b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$$

b) Montrons que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$

① Montrons que $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = t \\ c = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c = t = 0 \end{cases}$$

② Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Il faut trouver $A \in \mathcal{A}$ et $S \in \mathcal{S}$ telles que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = A + S$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c+t \\ -t+c & b \end{pmatrix}$$

Résolvons le système.

$$\begin{cases} x = a \\ y = c + t \\ z = c - t \\ w = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = w \\ c = \frac{y+z}{2} \\ t = \frac{y-z}{2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y-z}{2} \\ -\frac{y-z}{2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & \frac{y+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}}$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$