

1.2.34 Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\dim(\langle A; B; C; D \rangle)$ et trouver une base ^{d'un} supplémentaire de ce sous-espace.

Considérons le sev V engendré par ces quatre matrices,

$$V = \langle A, B, C, D \rangle$$

Quelle est sa dimension ? Nous allons échelonner la matrice dont les lignes sont les composantes des matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\dim(V) = 2$. Comme $\dim(M_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$, alors la dimension du supplémentaire est égale à 2.

$$B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Pour trouver une base du supplémentaire, il suffit de trouver deux vecteurs linéairement indépendants n'appartenant pas à V .

$$\text{Par exemple : } B_S = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = V \oplus S$$

$$\text{où } S = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$