Géométrie dans l'espace I – TE 819

Problème	1	2	3	4	5	**Total**
Points	4	3	4	9	8	28
Points obtenus						

Problème 1 (4 points)
Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par les points

$$A(-1\,;5\,;5) \quad , \quad B(-4\,;-1\,;-4) \quad \text{et} \quad C(6\,;11\,;22)$$

• vecteurs directeurs :

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

• équations paramétriques :

$$\begin{array}{l|c|c} & K & K \\ \begin{cases} x = -1 + K + 7t \\ y = 5 + 2K + 6t \\ z = 5 + 3K + 17t \end{cases} & \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot(-1) \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot 3 \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|c} & t \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -7 + 8t \\ 3x - z = -8 + 4t \end{cases} & \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot(-2) \end{matrix} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -4x - y + 2z = 9$$

$$\Leftrightarrow (\alpha) : \underline{4x + y - 2z + 9 = 0}$$

Problème 2 (3 points)
Trouver une équation paramétrique vectorielle du plan α d'équation cartésienne

$$(\alpha) : 3\,x - 4\,y + 2\,z = 12$$

$$(\alpha) : \begin{cases} 3x = 12 + 4k - 2t \\ y = k \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + \frac{4}{3}k - \frac{2}{3}t \\ y = k \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

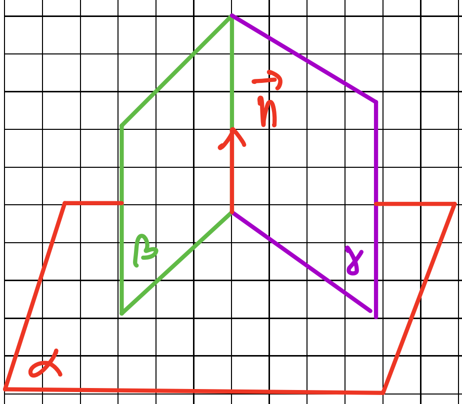
$$\Leftrightarrow (\alpha) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Problème 3 (4 points)
Déterminer une équation paramétrique vectorielle du plan α perpendiculaire aux plans

$$(\beta) : x + 4\,y + z - 12 = 0 \quad \text{et} \quad (\gamma) : 3x - 4y + z + 7 = 0$$

et passant par l'origine.

$$\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problème 4 (9 points)
On donne :

- Une droite a qui passe par $A(0;1;1)$ et admet $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur

- Une droite b qui passe par $B(2;1;2)$ et admet $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur

a) Calculer la distance entre les droites a et b.

b) Calculer les coordonnées du point M de a et du point N de b de sorte que le segment MN soit perpendiculaire à la fois à a et à b.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\delta(a,b) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|}{\| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -2 + 2 + 1 - 4 = -3$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \| \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \| = 3\sqrt{2}$$

b) Soit $M \in a$: $M(k, 1-k, 1+k)$.

Soit $N \in b$: $N(2+t, 1+2t, 2+t)$

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 2+t-k \\ 2t+k \\ 1+t-k \end{pmatrix}$$

On a : $\overrightarrow{MN} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ et $\overrightarrow{MN} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} 2 + t - k - 2t - k + 1 + t - k = 0 \\ 2 + t - k + 4t + 2k + 1 + t - k = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3k = -3 \\ 6t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ t = -0.5 \end{cases}$$

On a : $M(1 ; 0 ; 2)$ et $N(1.5 ; 0 ; 1.5)$.

Problème 5 (8 points)

On donne un plan α par l'équation $2x - 2y + z - 4 = 0$ et que la droite d par

$$(d) : \begin{cases} x = 4 - k \\ y = -1 + 5k \\ z = 6 + 12k \end{cases}$$

a) Démontrer que d est parallèle à α.

b) La droite d' est l'image de la droite d par une symétrie orthogonale de plan α. Donner un système d'équations paramétriques de d'.

a) $d \cap \alpha$:

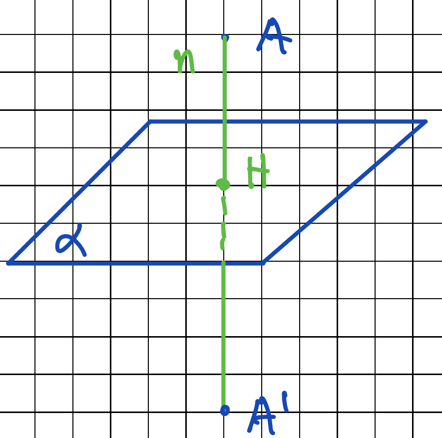
$2(4-K) - 2(-1+5K) + (6+12K) - 4 = 0$

$8 - 2K + 2 - 10K + 6 + 12K - 4 = 0$

$0 \cdot K + 12 = 0$ aucune solution

donc $d \parallel \alpha$ 3

b) Il faut trouver le symétrique de $A(4;-1;6) \in d$ par rapport à α. 5



$(n) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche $H = n \cap \alpha$

$2(4+2K) - 2(-1-2K) + (6+K) - 4 = 0$

$8 + 4K + 2 + 4K + 6 + K - 4 = 0$

$9K + 12 = 0 \Rightarrow K = \frac{-12}{9} = \frac{-4}{3}$

Donc $H\left(4 - \frac{8}{3} ; -1 + \frac{8}{3} ; 6 - \frac{4}{3}\right)$

$H\left(\frac{4}{3} ; \frac{5}{3} ; \frac{14}{3}\right)$

H est le milieu de AA'.

Posons $A'(r, s, t)$ 4 -1 6

$$\begin{cases} \frac{4}{3} = \frac{r+4}{2} & \Rightarrow 3r+12 = 8 \Rightarrow r = -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} = \frac{s-1}{2} & \Rightarrow 3s-3 = 10 \Rightarrow s = \frac{13}{3} \\ \frac{14}{3} = \frac{t+6}{2} & \Rightarrow 3t+18 = 28 \Rightarrow t = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Donc $A'\left(-\frac{4}{3} ; \frac{13}{3} ; \frac{10}{3}\right)$

et finalement la droite symétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = -4/3 - k \\ y = 13/3 + 5k \\ z = 10/3 + 12k \end{cases} , \quad k \in \mathbb{R}}$$