3M8 – Mercredi 25 septembre 2024 Nom & prénom : ....

Géométrie dans l'espace I – TE 819R

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	4	3	4	8	8	27
Points obtenus						

Problème 1 (4 points)
Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par les points

$$A(2\,;\,-1\,;\,1) \quad , \quad B(12\,;\,-6\,;\,-10) \quad \text{et} \quad C(-9\,;\,3\,;\,14)$$

(α) : $7x + 3y + 5z - 16 = 0$

Problème 2 (3 points)
Déterminer l'intersection de la droite d et du plan π.

$$(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\pi) : x + 3y - 5z + 2 = 0$$

Intersection : $(-9\,;\ 14\,;\ 7)$

Problème 3 (4 points)
Déterminer une équation cartésienne du plan α perpendiculaire aux plans

$$(\beta) : x + 4\,y + z - 12 = 0 \quad \text{et} \quad (\gamma) : 3x - 4y + z + 7 = 0$$

et passant par le point $P(1\,;\,0\,;\,0)$.

(α) : $4x + y - 8z - 4 = 0$

Problème 4 (8 points)
On donne le point $P(0;-1;2)$ et deux droites d_1 et d_2:

$$d_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer la distance du point P à la droite d_1.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d qui passe par P et qui coupe chacune des deux droites d_1 et d_2.

a) $A(1,1,0)$, $B(0,1,0)$

$\vec{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{AP} \times \vec{d_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$

$\delta(P, d_1) = \dfrac{\|\vec{AP} \times d_1\|}{\|\vec{d_1}\|} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

b) $\alpha \perp \vec{n}$ qui passe par P :

$(\alpha): y + z + d = 0$

par $P(0;-1;2) \Rightarrow d = -1 \Rightarrow (\alpha): y + z - 1 = 0$

Le point cherché : $d_2 \cap \alpha$: $1 + \ell - 1 = 0 \Rightarrow \ell = 0$

Le point : $Q(0,1,0)$; $\vec{QP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

droite cherchée : (QP) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problème 5 (8 points)

On donne un plan α par l'équation $2x - 2y + z - 4 = 0$ et que la droite d par

$$(d) : \quad \begin{cases} x = 4 - k \\ y = -1 + 5k \\ z = 6 + 12k \end{cases}$$

a) Démontrer que d est parallèle à α.

b) La droite d' est l'image de la droite d par une symétrie orthogonale de plan α. Donner un système d'équations paramétriques de d'.

voir TE 819, problème 5