3M8 – Mercredi 13 novembre 2024 Nom & prénom : ....

Algèbre linéaire I – TE 820A

Problème	1	2	3	4	5	**Total**
Points	6	6	6	6	6	30
Points obtenus						

Problème 1 (6 points)
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Effectuer les calculs suivants

a) $(2 \cdot B) + (C \cdot A)$ b) $E \cdot D$

a) $2B + CA = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}}$ 3

b) $ED = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

$DE = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$ED - DE = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -5 & -2 & 9 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}}$ 3

Problème 2 (6points)
Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Trouver la matrice B telle que

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} -20 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}}_{C}$$

Il faut inverser A :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -\frac{1}{5} L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -20 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} \cdot C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -20 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -30 & 60 \\ 35 & -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

Problème 3 (6 points)
Ecrire la matrice augmentée du système ci-dessous et déterminer sa solution en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice.

$$\begin{cases} 2x + y + z = -5 \\ -x + y + z = 7 \\ 2x + 2y - z = 4 \end{cases}$$

$S = \{(-4; 5, -2)\}$

Matrice augmentée du système : $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_1 \leftarrow -L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 18 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -\frac{1}{3} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \\ z = -2 \end{cases}$$

Problème 4 (6 points)
Dans $E = \mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel des triplets de réels on considère les sous-ensembles suivants de E :

a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$,
b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y\}$,
c) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2\,z \text{ et } x = 1\}$.

Pour chacun de ces sous-ensembles, déterminer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E. Justifiez rigoureusement votre réponse en vérifiant les conditions nécessaires.

a) $F \subset E$ est un sev si $F \neq \emptyset$ et si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $a, b \in F$

- $\lambda a \in F$ $\quad a = (x, y, z)$
- $a + b \in F$ $\quad a = (x, y, z)$, $b = (r, s, t)$

- $F \neq \emptyset$
- $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ avec $x + y + z = 0$
  $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x + y + z) = \lambda \cdot 0 = 0$
- $(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + s, z + t)$
  avec $x + y + z = 0$ et $r + s + t = 0$

  $(x + r) + (y + s) + (z + t) = (x + y + z) + (r + s + t)$
  $= 0 + 0 = 0$

donc $\lambda a \in F$ et $a + b \in F$. Donc F est un sev.

b) • $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ avec $x = 2y$.

Comme $x = 2y \Leftrightarrow \lambda x = \lambda \cdot 2y = 2\lambda y$

- $(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + s, z + t)$
  avec $x = 2y$ et $r = 2s$.
  $(x = 2y$ et $r = 2s) \Leftrightarrow (x + r = 2y + 2s = 2(y + s))$

donc G est un sev

c) $H = \{ (1, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$

$h = (1, 0, 0) \in H$.

$-h = (-1; 0, 0) \notin H$

donc H n'est pas un sev.

Problème 5 (6 points)
Soit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ muni des opérations suivantes :

- **Addition** : pour $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E$, on définit
$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 1).$$
- **Multiplication par un scalaire** : pour tout $(x, y) \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit
$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Déterminer si E, muni de ces opérations, est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

La multiplication $\odot$ est naturelle.

Regardons l'addition :

- L'opération $\oplus$ est interne
- L'opération $\oplus$ est commutative

$$\big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2 + 1) + (x_3, y_3)$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3 + 2)$$
$$(x_1, y_1) + \big((x_2, y_2) + (x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3 + 1)$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3 + 2)$$

- Quel est l'élément neutre ?

$$(x, y) + (\alpha, \beta) = (x, y) \Rightarrow \begin{cases} x + \alpha = x \\ y + \beta + 1 = y \end{cases}$$
$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ et } \beta = -1$$
$$(x, y) + (0, -1) = (x, y + 1 - 1) = (x, y)$$

· Quel est l'opposé de (x,y) ?

$(x,y) + (\alpha,\beta) = (0,-1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x+\alpha = 0 & \Rightarrow \alpha = -x \\ y+\beta+1 = -1 & \Rightarrow \beta = -y-2 \end{cases}$

L'opposé de (x,y) est $(-x, -y-2)$

Passons à la multiplication :

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in E$

• $(\lambda+\mu) \odot (x,y) = \underline{\big((\lambda+\mu)x, (\lambda+\mu)y\big)}$

• $\lambda \odot (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ et $\mu(x,y) = (\mu x, \mu y)$

$\big(\lambda \odot (x,y)\big) \oplus \big(\mu \odot (x,y)\big) = (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y)$

$= (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y + 1)$

$= \underline{\big((\lambda+\mu)x, (\lambda+\mu)y + 1\big)}$

Ces deux résultats sont différents (à cause du $+1$)

L'axiome $(\lambda+\mu)\odot(x,y) = (\lambda\odot(x,y)) \oplus (\mu\odot(x,y))$

n'est pas vérifié. $(E, \oplus, \odot)$ n'est pas un e.v.

et aussi :

$\lambda[(x,y) + (a,b)] = \lambda(x+a, y+b+1) = \underline{(\lambda x+\lambda a, \lambda y+\lambda b+\lambda)}$

$\neq \lambda(x,y) + \lambda(a,b) = (\lambda x, \lambda y) + (\lambda a, \lambda b) = \underline{(\lambda x+\lambda a, \lambda y+\lambda b+1)}$