Intégrales – TE 823

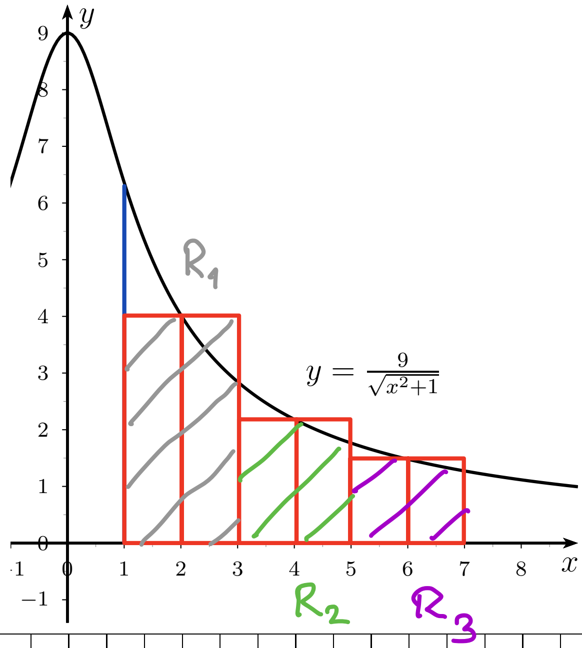
Problème	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points	4	12	6	6	6	6	6	46
Points obtenus								

Problème 1 (4 points)

En utilisant une somme de Riemann pour laquelle l'intervalle considéré est divisé en trois sous-intervalles et où l'on considère le point milieu de chacun de ces sous-intervalles, trouver une valeur approximative de

$$\mathcal{A} = \int_1^7 \frac{9}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

Représenter les rectangles utilisés pour calculer cette approximation.



$A \cong R_1 + R_2 + R_3$

$A \cong 2 \cdot \left[f(2) + f(4) + f(6) \right]$

$\cong 18 \left[\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{37}} \right] \cong 18 \cdot 0{,}854 \cong 15{,}375$

Problème 2 (12 points)

6'12"

Calculer :

a) $\int x \cdot \sqrt{3 - 8\,x^2}\,dx$

b) $\int \frac{x+6}{\sqrt{x}}\,dx$

a) $\int x\,(3-8x^2)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{24}\sqrt{(3-8x^2)^3} + C$

$C = K \cdot (3-8x^2)^{\frac{3}{2}}$

$C' = K \cdot \frac{3}{2}(3-8x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-16x) = K \cdot (-24x)(3-8x^2)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow K = -\frac{1}{24}$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x}} + 6x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} + 6x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 12x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} + C$

c) $\int (-2 + 4\,x - 6\,x^2 + 12\,x^3)\,dx$

d) $\int \sin(\pi x)\,(1 + \cos(\pi x))^3\,dx$

c) $\int -2 + 4x - 6x^2 + 12x^3\,dx$

$= -2x + 2x^2 - 2x^3 + 3x^4 + C$

d) $\int \sin(\pi x)\,(1 + \cos(\pi x))^3\,dx = \frac{-1}{4\pi}\,(1 + \cos(\pi x))^4 + C$

$c = K\,(1 + \cos(\pi x))^4$

$c' = K \cdot 4\,(1 + \cos(\pi x))^3 \cdot (-\sin(\pi x) \cdot \pi)$

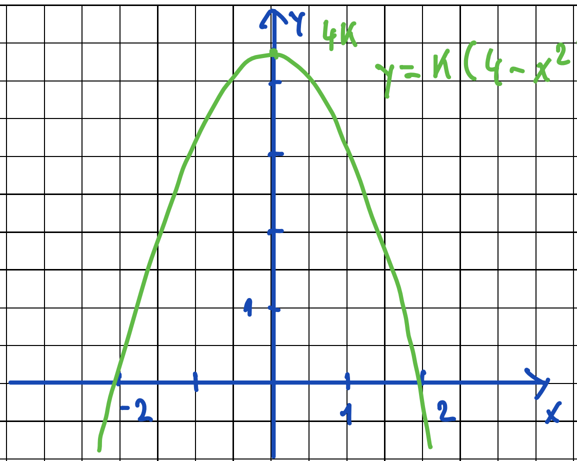
$= K \cdot (-4\pi)\,\sin(\pi x) \cdot (1 + \cos(\pi x))^3$

Problème 3 (6 points)

Déterminer la valeur du nombre réel $k > 0$ pour que l'aire du domaine plan limité par l'axe Ox et la courbe d'équation :

$$y = k\,(4 - x^2)$$

soit égale à 128.



$$128 = K \int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx = K \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = K \left. \frac{12x - x^3}{3} \right|_{-2}^{2}$$

$$= K \left(\frac{24 - 8}{3} - \frac{-24 + 8}{3} \right) = \frac{32}{3} K$$

$$\Rightarrow \quad \frac{32}{3} K = 128 \quad \Rightarrow \quad K = 12$$

Problème 4 (6 points)
En utilisant le changement de variable $x = \frac{2}{3}\sin(t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2/3} \sqrt{4 - 9\,x^2}\,dx$$

$x = \frac{2}{3}\sin(t)$

x	t
0	0
$\frac{2}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$t = \arcsin\left(\frac{3}{2}x\right)$

$dx = \frac{2}{3}\cos(t)\,dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{4 - 4\sin^2(t)}}_{2\cos(t)} \cdot \frac{2}{3}\cos(t)\,dt = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}\Big[t + \sin(t)\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

CRM

Problème 5 (6 points)
Calculer l'intégrale suivante en effectuant une intégration par parties :

$$\int_0^5 x\sqrt{5-x}\,dx$$

$$\int x\sqrt{5-x}\,dx = -\frac{2}{3}x\sqrt{(5-x)^3}\Big|_0^5 - \int_0^5 -\frac{2}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

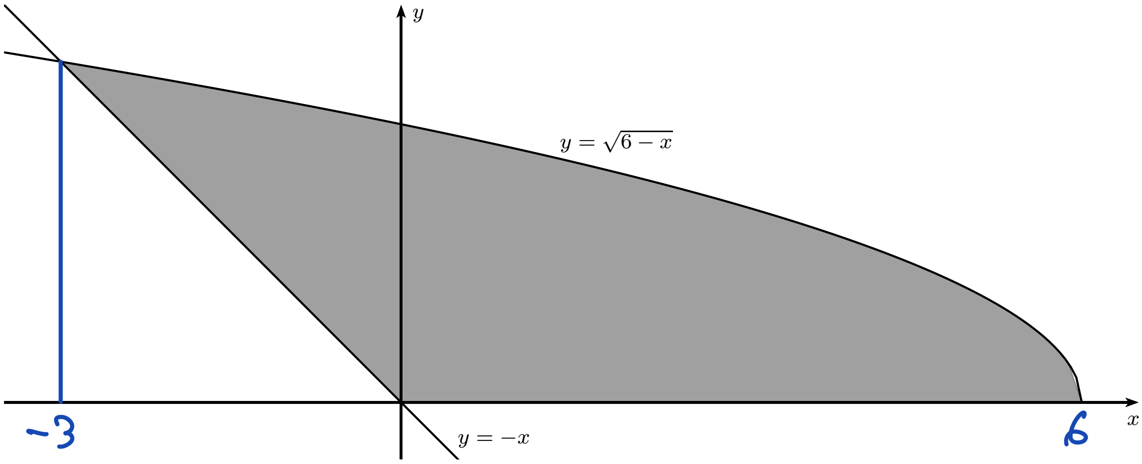
$u = x \quad ; \quad u' = dx$

$v = -\frac{2}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad v' = (5-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$= \frac{2}{3}\int_0^5 (5-x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(5-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^5$$

$$= \frac{4}{15}\cdot 5^{5/2} = \frac{4}{15}\cdot 25\cdot\sqrt{5} = \frac{20}{3}\sqrt{5}$$

Problème 6 (6 points)
Déterminer l'aire grisée.



Intersection :

$\sqrt{6-x} = -x \quad , \quad x \leq 0$

$6-x = x^2 \iff x^2+x-6=0 \iff (x+3)(x-2)=0$

$\iff x=-3$

Aire grisée : $\displaystyle\int_{-3}^{6} \sqrt{6-x}\, dx - \int_{-3}^{0} -x\, dx$

$= -\frac{2}{3}(6-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-3}^{6} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{-3}^{0}$

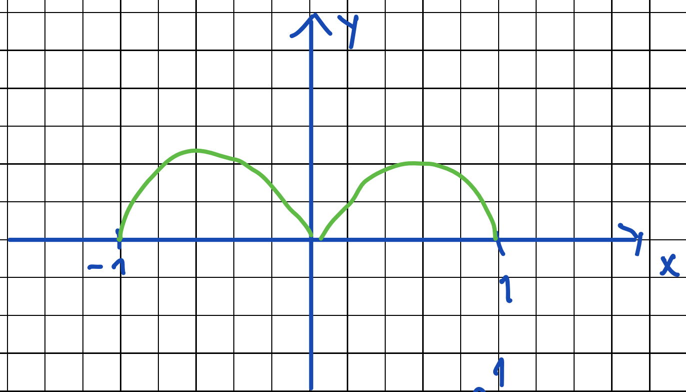
$= -\frac{2}{3}\left[0-9^{3/2}\right] + \left(0-\frac{9}{2}\right) = \frac{2}{3}\cdot 27 - \frac{9}{2} = 18-\frac{9}{2} = \underline{\frac{27}{2}}$

Problème 7 (6 points)

Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2 - x^4}$.

Posons $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4} = \sqrt{x^2(1-x^2)} = \sqrt{\underbrace{x^2(1-x)(1+x)}_{r(x)}}$

x		-1		0		1	
$r(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$



$f(x) = f(-x)$

f est paire

Volume : $V = 2\pi \int_0^1 x^2 - x^4 \, dx$

$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$

$= 2\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{4\pi}{15}$