02.10.24

Exercice 5

Soit $\mathbb{V} = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $\mathbb{V}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ à l'aide des deux lois décrites ci-dessous.

a) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ et $k \cdot (a,b) = (k\,a, b)$.

b) $(a,b) + (c,d) = (a,b)$ et $k \cdot (a,b) = (k\,a, k\,b)$.

c) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ et $k \cdot (a,b) = (k^2\,a, k^2\,b)$.

d) $(a,b) + (c,d) = (a+d, b+c)$ et $k \cdot (a,b) = (k\,a, k\,b)$.

a) $5 \cdot (1,2) = (5; 2)$

$(2+3)(1,2) = 2(1,2) + 3(1,2) = (2,2) + (3,2) = (5,4)$

$(k+m)(a,b) = (ka + ma, b)$

$k(a,b) + m(a,b) = (ka, b) + (ma, b) = (ka + ma, 2b)$

b) $(a,b) + (c,d) = (a,b)$

$(c,d) + (a,b) = (c,d)$

pas commutatif

c) $3(1,2) = (9, 18)$

$(2+1)(1,2) = 2(1,2) + (1,2) = (4,8) + (1,2) \neq (5,10)$

d) $(1,-2) + (3,5) = (6,1)$

$(3,5) + (1,-2) = (1,6)$

Espaces vectoriels

$$+ : E \times E \longrightarrow E \qquad (x, y) \longmapsto x + y$$

$$\cdot \; \mathbb{R} \times E \longrightarrow E \qquad (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

(A_1) : $(x + y) + z = x + (y + z)$ associativité

(A_2) ; 0_E est l'élément neutre $0 + x = x + 0$

(A_3) : $\forall x \in E$, x a un inverse noté $-x$: $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$

(A_4) : $x + y = y + x$ commutativité

(M_1) : $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$

(M_2) : $1 \cdot x = x$, $\forall x \in E$

(M_3) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$

(M_4) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in E$

Exercice 6

Soit (E, +, ·) un espace vectoriel. On note 0_E l'élément neutre de (E, +).
Pour tout x dans E, le symétrique de x est noté $-x$.

a) Montrer que pour tout $x \in E$, $x + x = 2 \cdot x$.

b) Montrer que pour tout $x \in E$, $0 \cdot x = 0_E$.

c) Montrer que pour tout $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0_E}$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\forall x \in E : \quad x + x = 2 \cdot x$

$$x + x \underset{(M_2)}{=} 1 \cdot x + 1 \cdot x \underset{(M_4)}{=} (1+1) \cdot x = 2 \cdot x$$

$$\left[0 \cdot \vec{v} = \underbrace{\vec{0}}_{0_E} \right]$$

b) $0 \cdot x = 0_E$

$$0 \cdot x = (0+0) \cdot x \underset{(M4)}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

$$\underbrace{(0 \cdot x) + (-0 \cdot x)}_{0_E} = 0 \cdot x + \underbrace{0 \cdot x + (-0 \cdot x)}$$

$$= 0 \cdot x + 0_E \underset{(A_2)}{=} 0 \cdot x \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x = 0_E$$

c) $(-1) \cdot x = -x$

$$x + (-1) \cdot x \underset{(M2)}{=} 1 \cdot x + (-1) \cdot x \underset{(M4)}{=} (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x \underset{(b)}{=} 0_E$$

donc $x + (-1) \cdot x = 0_E$, donc $(-1) \cdot x$ est l'élément inverse de x

donc $-x = (-1) \cdot x$

Sous-espaces vectoriels

Soit $(V, +, \cdot)$ un espace vectoriel.

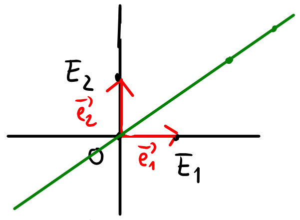
Soit $U \subset V$. U est un sous-espace vectoriel de V si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\alpha \cdot u \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in U$

2) $u + v \in U$, $\forall u, v \in U$

Exemples

1) Déterminer les sous-espaces vectoriels de V_2



Base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$

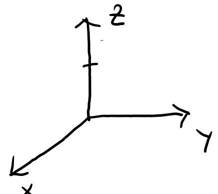
Repère $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$

$\vec{OE_1} = \vec{e_1}$, $\vec{OE_2} = \vec{e_2}$

$(V_2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel

- $\{(0,0)\}$ est un SEV de V_2
- Les droites qui passent par l'origine

2) Dans $\mathbb{R}^3$



$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est EV

- $\{(0,0,0)\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$
- $\{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid \lambda, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ est une droite qui passe par O
- Les plans qui contiennent O.

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(x; y; z) | x = 12\}$ NON

$B = \{(x; y; z) | z = 0\}$

$C = \{(x; y; z) | y = 3x\}$ OUI

$D = \{(x; y; z) | 2x + y + z = 21\}$

$E = \{(x; y; z) | 3x + 4y - 5z = 0\}$

$F = \{(x; y; z) | xy = z\}$

$G = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 = z^2\}$

$H = \left\{(x; y; z) | x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}\right\}$

$A \subset \mathbb{R}^3$ est un sev $\Leftrightarrow$ 1) $\lambda u \in A$ et 2) $u + v \in A$

1) $A = \{(12, y, z)\}$

$$\underbrace{(12, y, z)}_{\in A} + \underbrace{(12, a, b)}_{\in A} = (24, a, b) \notin A$$

3) $C = \{(x, 3x, z)\}$

$$(x, 3x, z) + (a, 3a, b) = (x + a, 3(x + a), z + b) \in C$$

$$\lambda(x, 3x, z) = (\lambda x, 3(\lambda x), \lambda z) \in C$$