

03.09.24

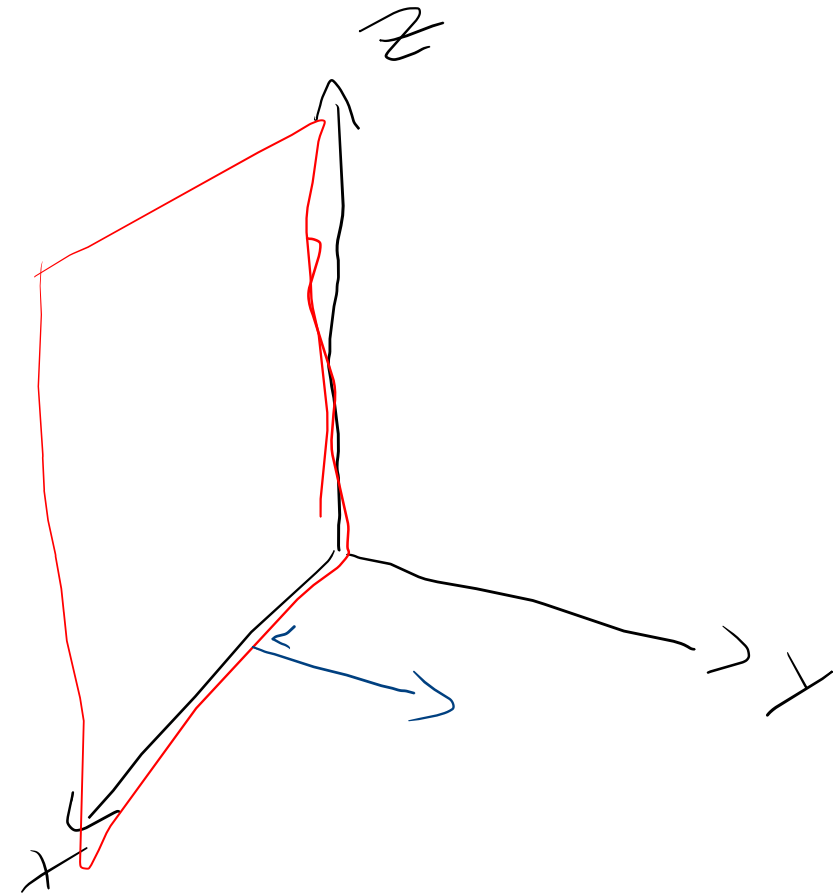
3.5.7 Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par $A(2; -1; 1)$ et qui est perpendiculaire aux plans d'équation $2x - z + 1 = 0$ et $y = 0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2k + 0 \\ y = -1 + 0 + l \\ z = 1 - k + 0 \end{cases} \begin{matrix} k \\ l \\ \cdot 2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 4 \\ y = -1 + 0 + l \end{cases} \Rightarrow x + 2z - 4 = 0$$



3.5.8

$$A(1; -1; 2)$$

$$B(3; 1; 1)$$

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k + t \\ y = -1 + 2k - 2t \\ z = 2 - k + 3t \end{cases}$$

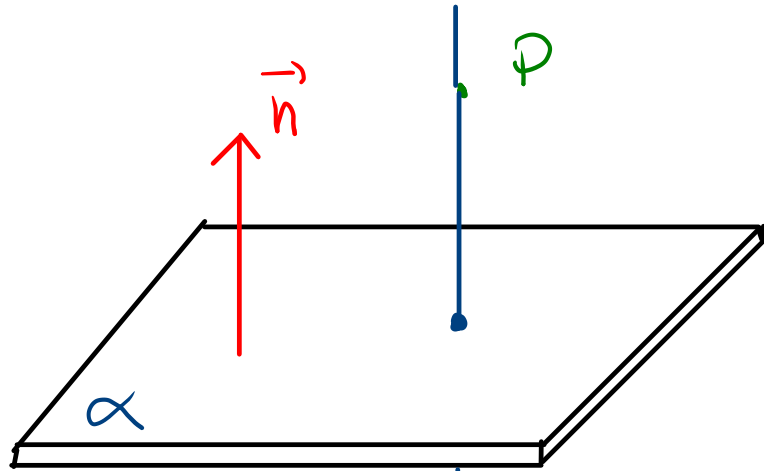
$$\begin{cases} x - y = 2 + 3t \\ y + 2z = 3 + 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 4y = 8 + 12t \\ 3y + 6z = 9 + 12t \end{cases}$$

$$4x - 3y - 4y - 6z = 1$$

$$4x - 7y - 6z + 1 = 0$$

3.5.9 Déterminer une équation paramétrique de la normale au plan d'équation $6x - 3y + 5z + 2 = 0$ issue du point $P(2; -3; -5)$.



$$(\alpha) : 6x - 3y + 5z + 2 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

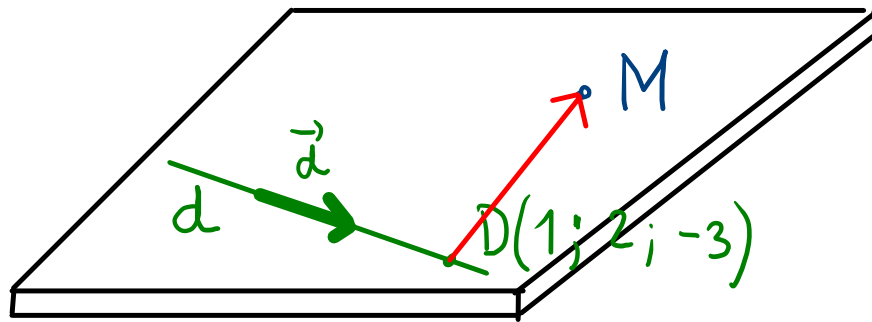
$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{5}$$

est un système d'équations cartésiennes

3.5.11 Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant le point $M(2; -2; 1)$ et la droite

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = -3 + 2k \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$.



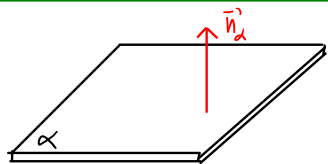
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{d}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{DM}}$$

3.5.12 Une droite et un plan sont donnés par leurs équations. Déterminer si ils sont concourants, parallèles ou inclus l'un dans l'autre et, selon les cas, leur intersection.

a) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\alpha: 2x + y - z + 15 = 0$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d



$d \parallel \alpha$

$$d \cap \alpha = \emptyset$$

a)
$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 3 + 2k \\ 2x + y - z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2(3 + 2k) + (5 - 2k) - (3 + 2k) + 15 = 0$$

$$0k + 23 = 0 \Leftrightarrow 23 = 0 \Rightarrow d \parallel \alpha$$

c) $d: \begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\alpha: x + 2y - 4z - 4 = 0$

1^{ère} méthode

$$\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 1 \\ x + 2y - 4z = 4 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \\ 1 \end{array} \right| \begin{array}{c} x \\ x \\ 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 2 \\ 3y - 3z = 3 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \div 2 \\ \div 3 \\ \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 1 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases} \text{ est l'équation d'une droite} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 1 \\ y = -x + 3z + 3 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{array} \right| \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 1 \\ 2y = x - 3 \end{cases}$$

$$y = z + 1 = -x + 3z + 3 \quad \Leftrightarrow y = z + 1 = \frac{x - 3}{2} - \frac{3}{2}$$

2^{ème} méthode déterminons une équation paramétrique vectorielle de d :

$$\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ y = t \\ x - y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z = -t + 3 \\ y = t \\ x - z = t + 1 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{array} \right| \begin{array}{c} x \\ z \end{array} \left| \begin{array}{c} \cdot 1 \\ \cdot (-3) \end{array} \right|$$

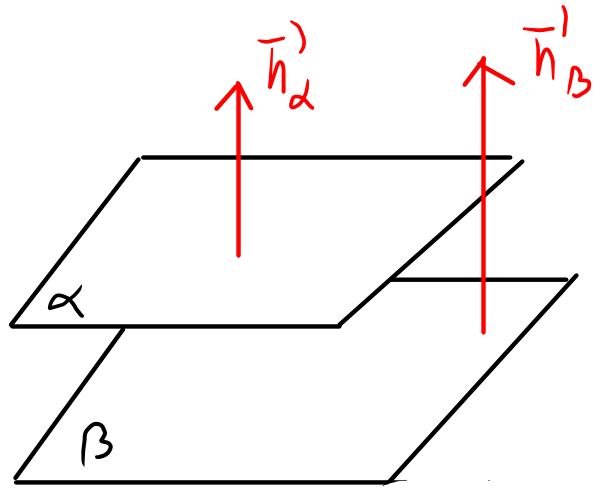
$$\begin{cases} -2x = -4t \\ y = t \\ -2z = -2t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d \cap \alpha: 2t + 2t - 4(-1 + t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow d \subset \alpha$$

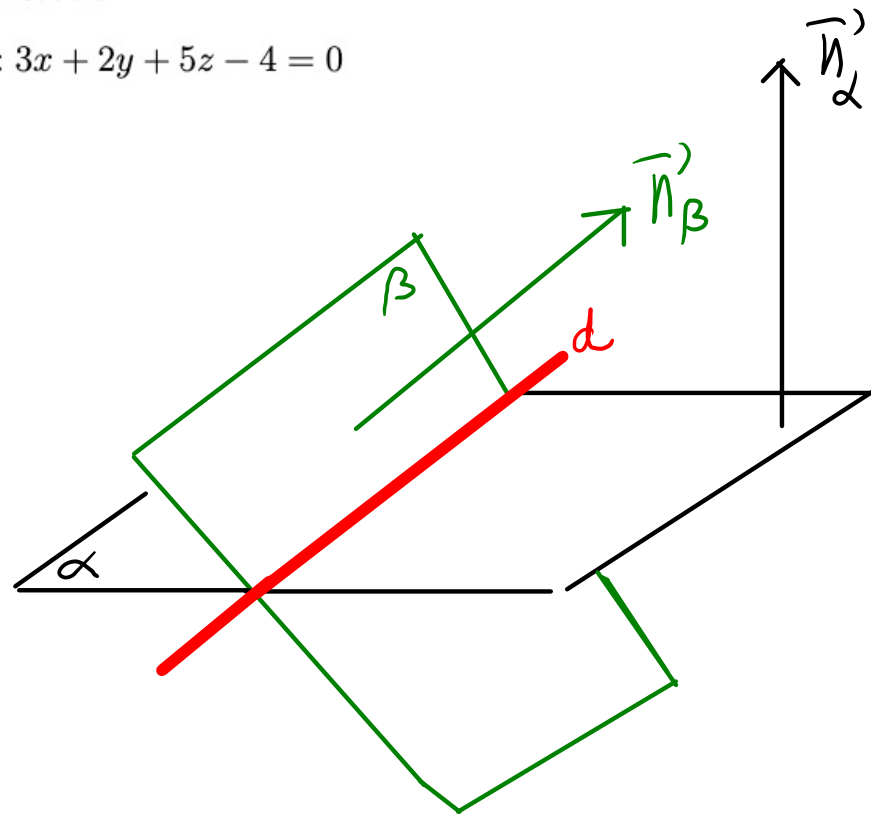
3.5.13 Deux plans sont donnés par leurs équations. Déterminer s'ils sont concourants, parallèles ou confondus et, selon les cas, leur intersection.

a) $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$

$\beta : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$



$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta$



$\alpha \cap \beta = d$ une droite

2) $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\alpha \cap \beta$ en une droite

$\vec{d} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$

est un vecteur directeur de d

On trouve un point sur d en posant $z = 0$ par exemple.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases} \dots$$