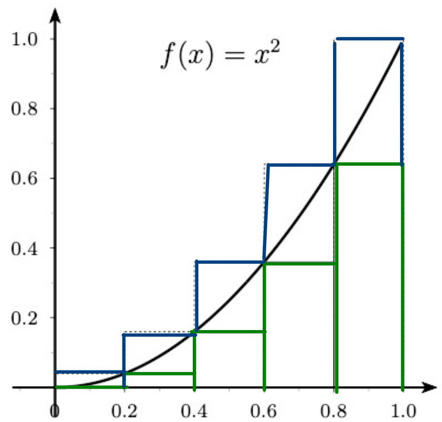
2.1.1 Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$.
On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction représentative de $f(x)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Pour cela, subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles d'égale longueur.



$\sigma = (0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1.0)$

pas : $\frac{1}{5} = 0,2$

a) Estimer A à l'aide de la somme $\overset{S_5}{\cancel{u_5}}$ des aires des cinq rectangles situés au-dessous de la courbe (le premier rectangle est d'aire nulle), puis à l'aide de la somme $\underset{S_5}{\cancel{v_5}}$ des aires des cinq rectangles situés au-dessus de la courbe.

Somme inférieure :

$$S_5 = \frac{1}{5} \cdot f(0) + \frac{1}{5} \cdot f(0,2) + \frac{1}{5} \cdot f(0,4) + \frac{1}{5} \cdot f(0,6) + \frac{1}{5} f(0,8)$$
$$= \frac{1}{5}\left(0 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) = \frac{6}{25}$$

Somme supérieure

$$S_5 = \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} \cdot f\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5} f\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{5} \cdot f\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} f(1)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2\right) = \frac{11}{25}$$

Donc l'aire sous la courbe est approchée par

$$\frac{6}{25} < A < \frac{11}{25}$$

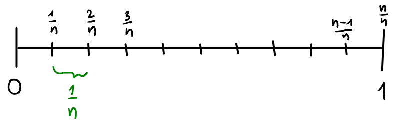
b) Améliorer l'estimation de A en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalles d'égale longueur.

bof, vu avec Python

c) Calculer ~~u_n~~ s_n et ~~v_n~~ S_n en subdivisant l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles d'égale longueur.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ très grand. On prend la subdivision

$$\sigma = \left(0\,;\ 1\cdot\frac{1}{n}\,;\ 2\cdot\frac{1}{n}\,;\ \dots\,;\ (n-1)\cdot\frac{1}{n}\,;\ 1\right)$$



$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Somme inférieure :

$$s_n = \frac{1}{n}\,0^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

Somme supérieure :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Calculons ces deux sommes :

$$s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)\big(2(n-1)+1\big)\big((n-1)+1\big)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)\cdot\cancel{n}}{\cancel{6n^3}\ 6n^2} = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{\cancel{n^3}\ n^2}\,\frac{\cancel{n}(2n+1)(n+1)}{6} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

On a borné l'aire :

$$\frac{2n^2-3n+1}{6n^2} < \mathcal{A} < \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

On utilise le théorème des deux gendarmes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} < \mathcal{A} < \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\cdot 6} < \mathcal{A} < \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\cdot 6}$$

$$\frac{1}{3} < \mathcal{A} < \frac{1}{3}$$

Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$.

On note
$$\boxed{\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}}$$

Le signe $\int$ a été introduit par Bernoulli en 1690.

Le calcul intégral a été introduit bien avant le calcul différentiel.

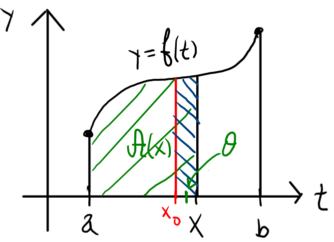
(Archimède, Kepler, Newton et Leibniz).

Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$.

Notons $y = f(t)$ sa valeur en $t \in [a,b]$

De plus, pour $x \in [a,b]$, considérons l'aire algébrique $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

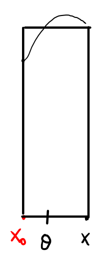


On constate que $\mathcal{A}$ est une fonction définie et continue sur $[a,b]$. En particulier

$$\mathcal{A}(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Pour $x_0 \in [a,b]$: $\mathcal{A}(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$.

De plus $\underline{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0)} = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$



= Aire algébrique du domaine fermé limité par la courbe, l'axe horizontal et les deux verticales en x_0 et x

$\cong$ Aire d'un rectangle de base $(x - x_0)$ et de hauteur $f(\theta)$ où $\theta \in [x_0, x]$.

$\cong (x - x_0) \cdot f(\theta)$

Calculons le nombre dérivé de $\mathcal{A}$ en $x_0 \in [a;b]$:

$$\mathcal{A}'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} \overset{\text{Ind}}{\underset{\text{" }\frac{0}{0}\text{ "}}{=}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}\, f(\theta)}{\cancel{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} f(\theta) = f(x_0)$$

puisque θ est compris entre x_0 et x.

Connaissant le nombre dérivé $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$, on a la formule $\mathcal{A}'(x) = f(x)$ pour $x \in [a,b]$.

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$$

Ainsi la dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure est égale à la valeur de la fonction intégrée en sa borne supérieure

Théorème fondamental de l'analyse

$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de $f(x)$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Avec une autre fonction:

$$\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2} + 200\right|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 200\right) - \left(0 + 200\right) = \frac{1}{2}$$