

04.09.24

1.1.11 Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 10 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 1 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 18 \\ 4x - 7y + z - 6t = -5 \\ x + y - z + t = 1 \end{cases}$$

a) Matrice des coefficients du système

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

Matrice augmentée du système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} \cdot L_2 \\ L_3 \leftarrow -1 \cdot L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 17 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{6} \cdot L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Résolution d'un système linéaire

On obtient un système équivalent (même solution) à l'aide d'**Opérations élémentaires** sur les lignes :

1) On permute deux lignes (ou deux équations) $L_j \leftrightarrow L_i$

2) On multiplie une ligne (ou une équation) par un nombre non nul $L_i \leftarrow \lambda L_i, \lambda \neq 0$

3) On additionne à une ligne un multiple d'une autre ligne.
 $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad i \neq j$

1.1.12 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 3x - y + z = 3 \\ -3x + 5y + 4z = 5 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -13 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{13} L_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{13} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - \frac{7}{13} z = 0 \\ y - \frac{16}{13} z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{7}{13} z \\ y = \frac{16}{13} z \\ z = 13t \end{cases}$

$S = \left\{ (7t, 16t, 13t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{7}z = -\frac{1}{7} \\ y + \frac{4}{7}z = \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}z \\ y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}z \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0 \right) + t \left(-\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, 1 \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 3x - y + z = 3 \\ -3x + 5y + 4z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -9 \\ 0 & 8 & 10 & 17 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Cette matrice augmentée montre que le système initial est impossible

$$\text{Donc } S = \emptyset$$

$$e) \begin{cases} x - 3y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

deux degrés de liberté

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 4 & 0 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{7} L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & +\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{7} z - \frac{5}{7} t \\ y &= \frac{3}{7} z - \frac{4}{7} t \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2z-5t}{7}, \frac{3z-4t}{7}, z, t \right) \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}$$