04.12.24

1.2.20 Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}}_{A_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}}_{A_3} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_4} \Big)$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

On sait que $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$

Base naturelle $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Elle est libre. En effet :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$xA_1 + yA_2 + zA_3 + tA_4 = \boxed{0} \iff x = y = z = t = 0$$

$$\begin{cases} 3x + t = 0 \\ 6x + y - 8z = 0 \\ 3x - y - 12z - t = 0 \\ -6x - 4z + 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1}}{\approx}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{4} L_4}}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -20 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \div -\frac{1}{4}}{\approx} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{5} L_3}{\approx} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -8 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{6}{5}} \end{pmatrix}}_{\text{rang}(C) = 4} = C$$

Donc $\mathcal{F}$ est libre et génératrice, c'est donc une base de $M_2(\mathbb{R})$.

1.2.21 Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$

a) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - 3y + z = 0$$

de rang 1

qui représente un plan de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2

$\mathcal{B}_* = \big((-1, 0, 1), (3, 1, 0) \big)$

dim ss-ev des solutions : $3 - 1 = 2$

$\dim(\mathcal{F}) = \dim(E) - \operatorname{rang}(A)$

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=0 \\ 4x+3y-z=0 \\ 6x+5y+z=0 \end{cases}$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_4 = L_3 + 2L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3 - 2L_1$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$3 - 2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = -5z \end{cases}$$

$\mathcal{B}_* = ((4, -5, 1))$

1.2.22 Trouver une base du sous-espace E de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \{(x; y; z; t) | x + y = z - t = 0\}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_* = \left((1; -1; 0; 0) , (0; 0; 1; 1;) \right)$$

1.2.23 Dans $\mathbb{R}^4$, trouver une base comprenant :

a) le vecteur $(2;1;3;2)$,

b) les vecteurs $(2;1;0;3)$ et $(1;-2;1;0)$,

c) les vecteurs $(2;0;1;0)$, $(0;0;1;3)$ et $(0;1;1;0)$.

Si $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_k)$ une famille libre dans un ev de dim n, avec $n > k$, alors vous pouvez compléter $\mathcal{F}$ avec $n-k$ vecteurs bien choisis $(f_1^*, \dots, f_{n-n}^*)$ pour que la famille $(f_1, \dots, f_k, f_1^*, \dots, f_{n-k}^*)$ soit une base de l'ev

a) $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ $\quad \mathcal{B} = \big((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\big)$ est la base naturelle.

$\big((2,1,3,2), f_1^*, f_2^*, f_3^*\big)$

$\mathcal{B}^* = \big((2,1,3,2), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\big)$

$x(2,1,3,2) + y(1,0,0,0) + z(0,1,0,0) + t(0,0,1,0) = (0,0,0,0)$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x + t = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \iff x = t = z = y = 0$$

Le système est libre, c'est une base.

b) les vecteurs $\underbrace{(2; 1; 0; 3) \text{ et } (1; -2; 1; 0)}_{\text{linéairement indépendants.}}$,