06.11.24

1.2.12 Montrer que les familles suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont libres :

a) $\big((1;-1;1);(0;2;-1)\big)$

b) $\big((0;1);(1;1)\big)$

c) $\big((2;1;0);(0;1;-1)\big)$

d) $\big((-1;3);(0;2)\big)$

e) $\big((\pi;0);(0;e)\big)$

f) $\big((2;4);(2;5)\big)$

g) $\big((1;1;0);(1;1;1);(0;-1;1)\big)$

h) $\big((0;1;1);(0;1;3);(1;3;5)\big)$

a) $\lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(0,2,-1) = (0,0,0)$

$$(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1) + (0, 2\lambda_2, -\lambda_2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.13

a) Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les vecteurs $(1; 2; -1)$, $(1; -1; 3)$ et $(m; -1; 2)$, où m est un nombre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de m forment-ils une famille liée ?

Si la famille est liée, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls, tels que

$$\lambda_1(1;2;-1) + \lambda_2(1;-1;3) + \lambda_3(m;-1,2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{array} \right| \begin{array}{c} \lambda_2 \\ \cdot 3 \\ 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}\lambda_3 - \frac{3}{5}\lambda_3 + m\lambda_3 = 0 \Rightarrow \left(m - \frac{2}{5}\right)\lambda_3 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{5} \\ \lambda_2 = -\frac{3}{5}\lambda_3 \\ \lambda_1 = \frac{1}{5}\lambda_3 \end{cases}$$

Remarque

Si $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ est lié, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$

Supposons $\lambda_1 \neq 0$, alors $f_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} f_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} f_3$

$$f_1 = \mu_1 f_2 + \mu_2 f_3$$

1.2.16 Soit $A = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et f, g, h trois éléments de $\mathcal{F}_A$ définis par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{3}{x-1} \qquad h(x) = \frac{1}{2x+2}$$

La famille $(f; g; h)$ est-elle libre ?

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h = 0$$

$$\lambda_1 \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} + \lambda_2 \frac{3}{x-1} + \lambda_3 \frac{1}{2(x+1)} = 0$$

$$\frac{2\lambda_1(2x+1) + \lambda_2 6(x+1) + \lambda_3(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = 0 \quad \Big| \cdot 2(x-1)(x+1) \neq 0$$

$$4\lambda_1 x + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 x + 6\lambda_2 + \lambda_3 x - \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 6\lambda_2 = -\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = \lambda_3 \end{cases} \begin{array}{|c|c} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot(-2) & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{cases} -6\lambda_2 = -3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 = -2\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \end{cases}$$

Si $\lambda_3 = 2$, alors $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_1 = -2$

$$-2 f(x) + g(x) + 2 h(x) = 0$$

Donc la famille est liée : $f(x) = \frac{1}{2} g(x) + h(x)$

Famille de générateurs

Soit V un ev et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de V.
On dit que $\mathcal{F}$ est une famille de générateurs de V si pour tout $v \in V$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

Exemple

La famille $\mathcal{F}_1 = \big((1,0), (0,1) \big)$ est une famille de générateurs de $\mathbb{R}^2$
En effet, $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) \quad , \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.
La famille $\mathcal{F}_2 = \big((1,0), (0,1), (1,2) \big)$ est aussi une famille de générateurs de $\mathbb{R}^2$.
Remarquons que
$$(1,2) = 1 \cdot (1,0) + 2(0,1) + 0(1,2)$$
$$(1,2) = 0(1,0) + 0 \cdot (0,1) + 1(1,2)$$

Une famille de vecteurs à la fois libre et génératrice est une base de l'espace vectoriel.

$\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ est libre et génératrice, alors

- $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$
- $\dim(V) = n$

1.2.17 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1;1)$ $\qquad e_2 = (1;0)$ $\qquad u = (0;1)$

a) $\mathcal{B} = \big((1,1) , (1,0) \big)$

<u>$\mathcal{B}$ est libre</u> : $\lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,0) = (0,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

<u>$\mathcal{B}$ est une famille de générateurs</u>

Soit $u=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, exprimons $u = (x,y)$ dans $\mathcal{B}$:

$$(x,y) = \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,0)$$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 \\ y = \lambda_1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \lambda_1 = y \\ \lambda_2 = x - \lambda_1 = x - y \end{array}$$

<u>Preuve</u> : $(x,y) = y\,(1,1) + (x-y)\,(1,0)$

$(x,y) = (y,y) + (x-y, 0)$

$(0,1) = 1 \cdot (1,1) + (-1)(1,0)$