07.01.25

5) Il semble que $y = \ln(x)$ admette une AO à droite.

Déterminons-la : $y = mx + h$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

Par définition $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$

Si $t > 1$, on a $t > \sqrt{t} \Rightarrow \frac{1}{t} < \frac{1}{\sqrt{t}}$

et pour $x > 1$, on a $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt < \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$

$$\ln(x) \overset{*}{<} 2(\sqrt{x} - 1) < 2\sqrt{x}$$

$*$ $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 t^{\frac{1}{2}} + C$
$= 2\sqrt{t} + C$

Finalement $0 < \ln(x) < 2\sqrt{x} \quad \Big| \div x$

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Par le théorème des deux gendarmes, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0}$

Donc il n'y a pas d'AOD.

2.3.6 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(5x)$

x		0	
$5x$	$-$	0	$+$

$ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$$

$$[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$$

f) $f(x) = \ln(x - x^2)$

$g(x) = x(1-x)$

x		0		1	
$x(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$ED(f) =]0;1[$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{x-x^2}$$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

Signe de $\dfrac{x^2}{1-x} = u$:

x		0^{p}		1^{i}	
$\dfrac{x^2}{1-x}$	$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$

$$ED(f) = \left]-\infty ; 0\right[\cup \left]0 ; 1\right[= \left]-\infty ; 1\right[- \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u}$$

$$u' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x(1-x) - x^2 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^{\cancel{2}\,1}} \cdot \frac{\cancel{1-x}}{x^2} = \frac{2x - x^2}{x^2(1-x)}$$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ $\qquad$ $\ln(x) = 0 \iff x = 1$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\qquad$ $x\ln(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$

m) $ED(f) = \mathbb{R}_+^* - \{1\} =]0; +\infty[- \{1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

$u = x \quad ; \quad u' = 1$

$v = \ln(x) \; ; \quad v' = \frac{1}{x}$

n) $ED(f) = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)' = \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

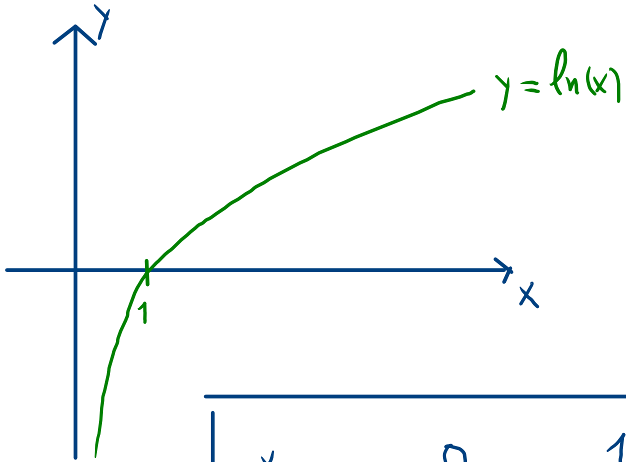
$$= (u^{-1})' = -u^{-2} \cdot u'$$

$u = x\ln(x)$

$u' = \ln(x) + 1$

$$f'(x) = -\frac{\ln(x) + 1}{(x\ln(x))^2}$$

2.3.7 Calculer les zéros et les extremums de $f(x) = \sqrt{\ln(x)} - \ln(\sqrt{x})$.



$$ED(f) = [1 ; +\infty[$$

x		0		1	
$\ln(x)$	//////	‖	$-$	0	$+$

1) Zéros de $f(x)$:

$$\sqrt{\ln(x)} = \ln(\sqrt{x}) \qquad , \quad x \geq 1$$

$$\sqrt{\ln(x)} = \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\sqrt{\ln(x)} = \frac{1}{2}\ln(x) \qquad \Big|\ (\ )^2$$

$$\ln(x) = \frac{1}{4}\ln^2(x)$$

$$\ln^2(x) - 4\ln(x) = 0$$

$$\ln(x)\left[\ln(x) - 4\right] = 0$$

$$\ln(x) = 0 \qquad\qquad \ln(x) = 4$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = e^4$$

Les zéros de $f(x)$: 1 et e^4.

2) $f(x) = \sqrt{\ln(x)} - \frac{1}{2}\ln(x)$

$= [\ln(x)]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot (\ln(x))' - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} - 1\right)$ $\quad ED(f)' =]1 ; +\infty[$

zéros de la dérivée : $\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} = 1 \iff \sqrt{\ln(x)} = 1 \iff x = e$

Coordonnées : $f(e) = \sqrt{\ln(e)} - \frac{1}{2}\ln(e) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(e ; \frac{1}{2}\right)$

Tableau de la croissance :

x	1		e	
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	max	↘

$Max\left(e ; \frac{1}{2}\right)$