07.11.24

2.2.9 Trouver l'expression mathématique de la fonction f, sachant que :

a) $f'(x) = 3x^2 - 4$, $f(5) = 54$;

a) $f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 3x^2 - 4\,dx = x^3 - 4x + c$

$f(5) = 54 \Rightarrow 125 - 20 + c = 54 \Rightarrow c = -51$

$f(x) = x^3 - 4x - 51$

b) $f''(x) = (x+1)(x-2)$, $f(1) = 8$, $f'(0) = 37/6$;

c) $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(9) = 2$, $f(1) = 2f(4)$.

b) $f'(x) = \int x^2 - x - 2\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$

- $f'(0) = \frac{37}{6} \Rightarrow c = \frac{37}{6}$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{37}{6}\,dx$

$= \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{37}{6}x + d$

- $f(1) = 8 \Rightarrow \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - 1 + \frac{37}{6} + d = 8 \Rightarrow d = 9 - 6 - \frac{1}{12} = 3 - \frac{1}{12} = \frac{35}{12}$

$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{37}{6}x + \frac{35}{12}$

c) $f'(x) = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

- $f'(9) = 2 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{9} + c = 2 \Rightarrow c = 2 - 6 = -4$

$f(x) = \int 2x^{\frac{1}{2}} - 4\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4x + d = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + d$

candidat : $k\,x^{\frac{3}{2}}$

(candidat)' : $k \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2}k = 2 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$

- $f(1) = 2f(4)$

$f(1) = \frac{4}{3} - 4 + d = -\frac{8}{3} + d$

$f(4) = \frac{4}{3} \cdot 8 - 16 + d = \frac{32}{3} - 16 + d = \frac{-16}{3} + d$

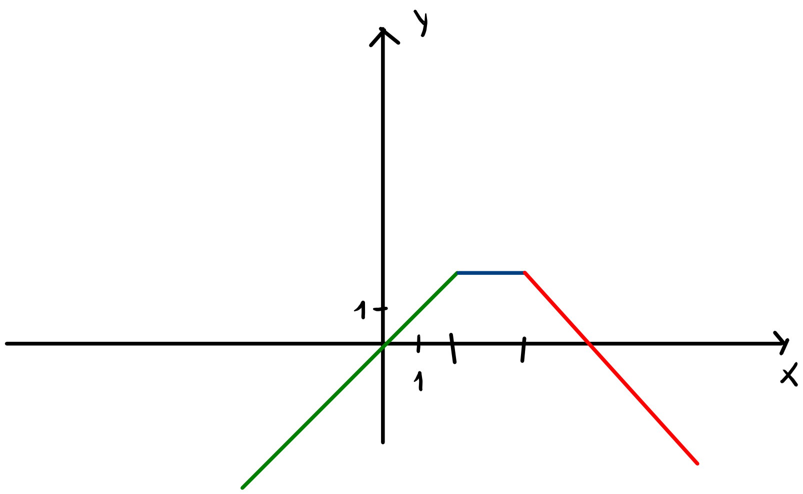
$\Rightarrow -\frac{8}{3} + d = \frac{-32}{3} + 2d \Rightarrow d = 8$

$f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + 8$

2.2.10 Déterminer la primitive F de chaque fonction f ci-dessous, en tenant compte des conditions imposées.

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4, \\ 6 - x & \text{si } x > 4 \end{cases}$ avec $F(0) = 1$.

- $f(x)$ est continue
- $f(x)$ n'est pas dérivable en $x = 2$ et $x = 4$

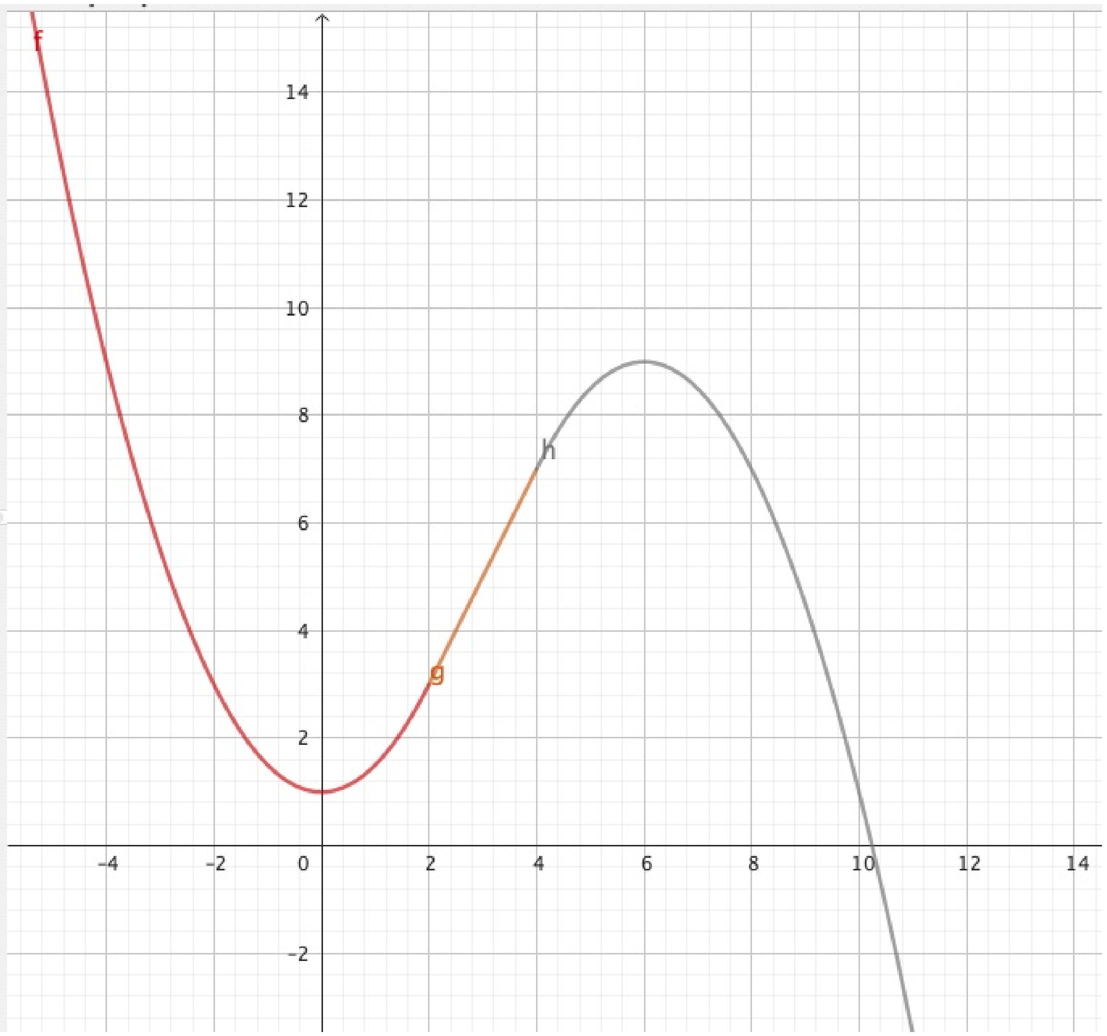


$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + a & \text{si } x < 2 \\ 2x + b & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 6x - \frac{1}{2}x^2 + c & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- $F(0) = 1 \Rightarrow a = 1$
- $F(2) = 3 \Rightarrow 4 + b = 3 \Rightarrow b = -1$
- $F(4) = 7 \Rightarrow 24 - 8 + c = 7 \Rightarrow c = -9$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 6x - \frac{1}{2}x^2 - 9 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- $f(x) = 0.5\,x^2 + 1, \quad (-100 \leq x \leq 2)$
- $g(x) = 2\,x - 1, \quad (2 \leq x \leq 4)$
- $h(x) = -0.5\,x^2 + 6\,x - 9, \quad (4 \leq x \leq 100)$



mardi 2.2.11

Intégrale définie

Nous avons démontré le résultat suivant :

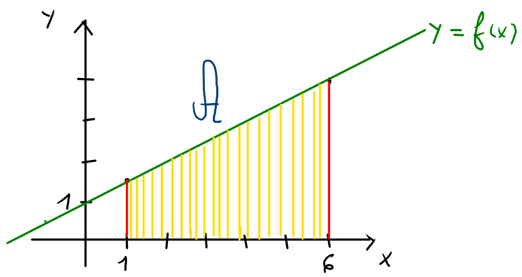
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$

Exemples

1) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Calculons l'aire délimitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les verticales $x = 1$ et $x = 6$.

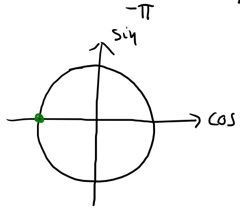


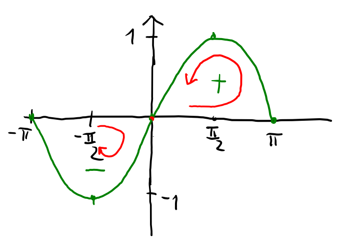
Par calcul géométrique : $\frac{f(1)+f(6)}{2} \cdot 5 = \frac{\frac{3}{2}+4}{2} \cdot 5 = \frac{55}{4}$

Par calcul d'intégrale : $\int_1^6 \frac{1}{2}x + 1\,dx = \frac{1}{4}x^2 + x \Big|_1^6 = \left(9+6\right) - \left(\frac{1}{4}+1\right)$

$= 15 - \frac{5}{4} = \frac{55}{4}$

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\left[\cos(\pi) - \cos(-\pi)\right] = -\left[-1-(-1)\right] = 0$





$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = 0$ est l'aire algébrique

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0$