08.01.25

1.2.35 Dans P_3, on considère les polynômes

$p_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad p_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \quad p_3 = t^3 + 6t - 5 \quad \text{et} \quad p_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

Calculer $\dim(\langle p_1; p_2; p_3; p_4 \rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

$\mathcal{B} = (t^3, t^2, t, 1)$. Posons $H = \langle p_1; p_2; p_3; p_4 \rangle$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

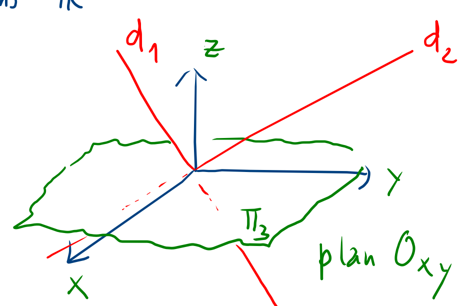
$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 6 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(H) = 2, \quad \mathcal{B}_H = (p_1, p_2)$$

$\Rightarrow$ La dimension d'un supplémentaire est égale à 2.

$$\mathcal{B}_S = (t^3, 1)$$

Dans $\mathbb{R}^3$



$$\mathbb{R}^3 = \Pi_3 \oplus d_1$$
$$\mathbb{R}^3 = \Pi_3 \oplus d_2$$

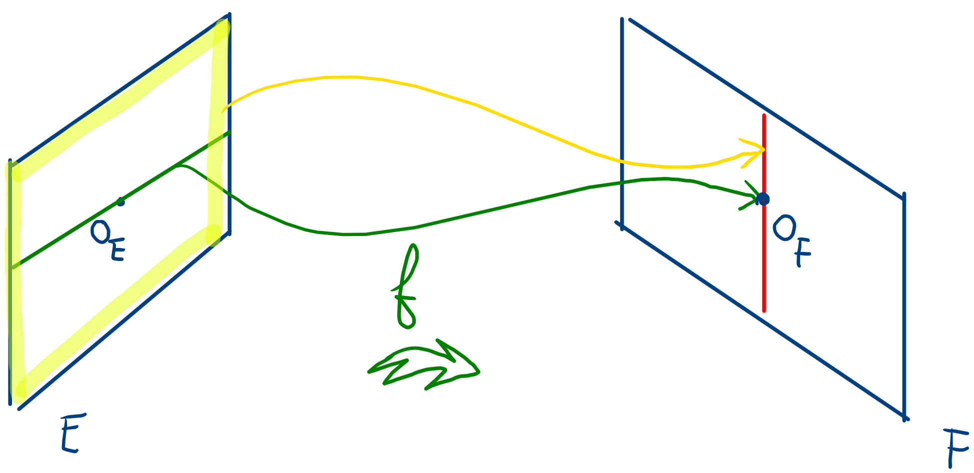
Application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels.

Une application $f : E \to F$ est linéaire si elle respecte les deux conditions suivantes :

① $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in E$

② $f(\lambda u) = \lambda f(u)$, $\forall u \in E, \lambda \in \mathbb{R}$



$\mathrm{Ker}(f) = \{ u \in E \mid f(u) = 0_F \}$

$\mathrm{Im}(f) = \{ v \in F \mid \exists u \in E \text{ avec } f(u) = v \}$

$\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de E.

$\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F.

Exemple

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$ est-elle linéaire ?

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$\neq x^2 + y^2 = f(x) + f(y)$$

NON LINEAIRE

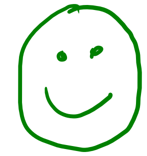
2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto mx$ est-elle linéaire ?

① $f(x+y) = m(x+y) = mx + my = f(x) + f(y)$

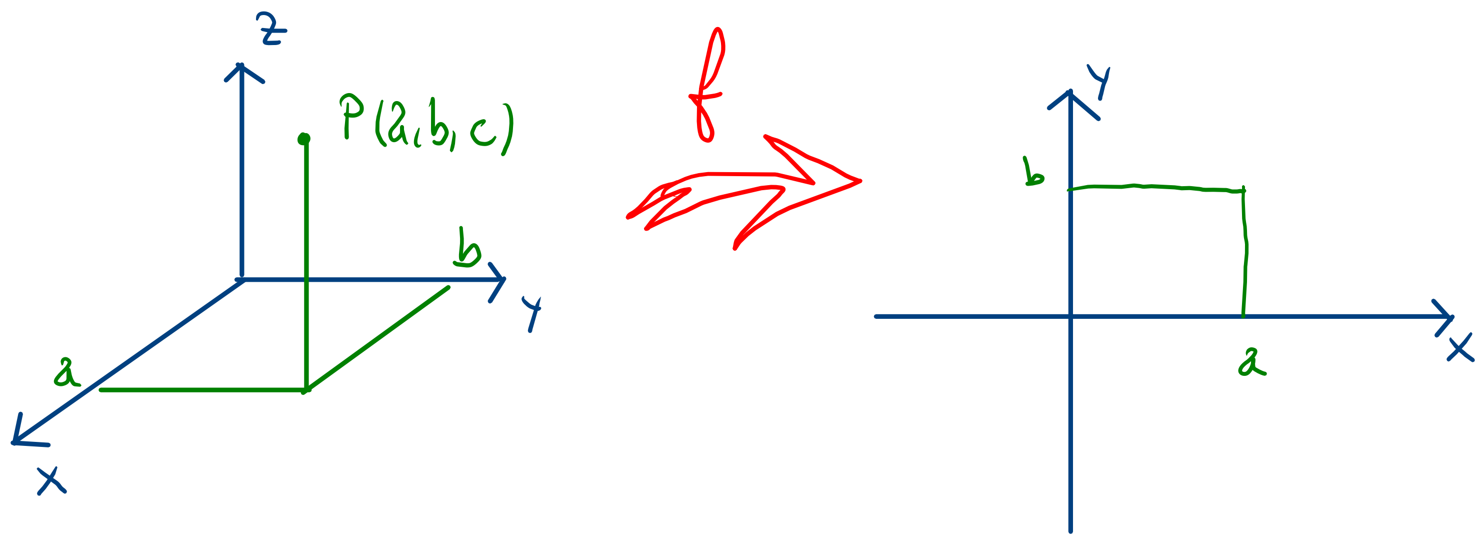
② $f(\lambda x) = m(\lambda x) = \lambda(mx) = \lambda f(x)$

3) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \longmapsto (x, y)$



oui



C'est une projection !

① $f\big((x,y,z) + (a,b,c)\big) = f\big((x+a, y+b, z+c)\big) = (x+a, y+b) = (x,y) + (a,b)$

$= f\big((x,y,z)\big) + f\big((a,b,c)\big)$

② $f\big(\lambda(x,y,z)\big) = f\big((\lambda x, \lambda y, \lambda z)\big) = (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x,y)$

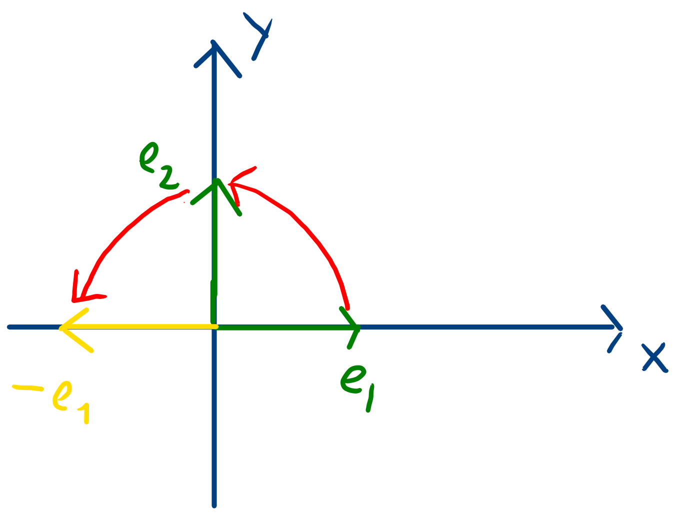
$= \lambda f\big((x,y,z)\big)$

4) $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elle est linéaire

$$U \longmapsto RU$$



$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1$$

C'est une rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $90°$

1.3 Applications linéaires

1.3.1 Les applications h, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivantes, sont-elles linéaires ?

a) $h((x;y)) = x+y$

b) $h((x;y)) = xy$

a) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x+y$

① $h\big((x,y)+(a,b)\big) = h\big((x+a, y+b)\big) = (x+y)+(a+b) = h((x,y)) + h((a,b))$

② $h(\lambda(x,y)) = h((\lambda x, \lambda y)) = \lambda x + \lambda y = \lambda(x+y) = \lambda h((x,y))$

e) $h(\underbrace{(x;y)}_{\in \mathbb{R}^2}) = \underbrace{(x;y;x-y)}_{\in \mathbb{R}^3}$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

① $h\big((x,y)+(a,b)\big) = h\big((x+a, y+b)\big) = \big(x+a, y+b, (x-y)+(a-b)\big)$

$= (x,y,x-y) + (a,b,a-b) = h((x,y)) + h((a,b))$

② $h(\lambda(x,y)) = h((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda x, \lambda y, \lambda(x-y))$

$= \lambda(x,y,x-y) = \lambda h((x,y))$

1.3.2 Pour les applications linéaires de l'exercice précédent, déterminer la matrice H de h relativement aux bases canoniques.

e) $h((x;y)) = (x;y;x-y)$

$\mathcal{B}_1 = (\underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2})$ $\qquad \mathcal{B}_2 = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$

$h(e_1) = (1;0;1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h(e_2) = (0;1;-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$h((7,-2)) = h(7e_1 - 2e_2) = h(7e_1) + h(-2e_2) = 7\,h(e_1) - 2\,h(e_2)$

Une application linéaire est entièrement determinée par l'image des vecteurs de la base de l'ev de départ.

$h\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 7\,h(e_1) - 2\,h(e_2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+0 \\ 0-2 \\ 7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

$h\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} =$

images des vecteurs de la base de $\mathbb{R}^2$

$H = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\dim(\mathbb{R}^2) \text{ départ}} \Big\} \dim(\mathbb{R}^3) \text{ arrivée}$

1.3.1 et 1.3.2