09.01.25

2.3.8 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+4}$

$u = x^2 - 2x + 4$

$u' = 2x - 2 = 2(x-1)$

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$

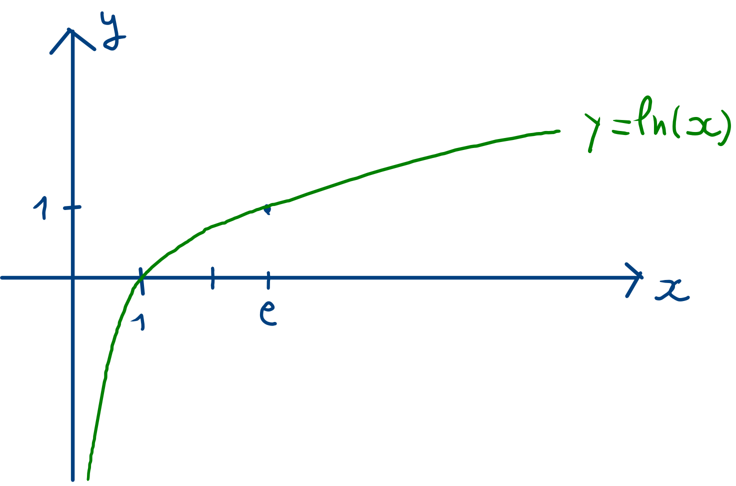
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) + c$$

$u = x^2 - 2x + 4$

$du = (2x-2)\,dx$

Fonction exponentielle



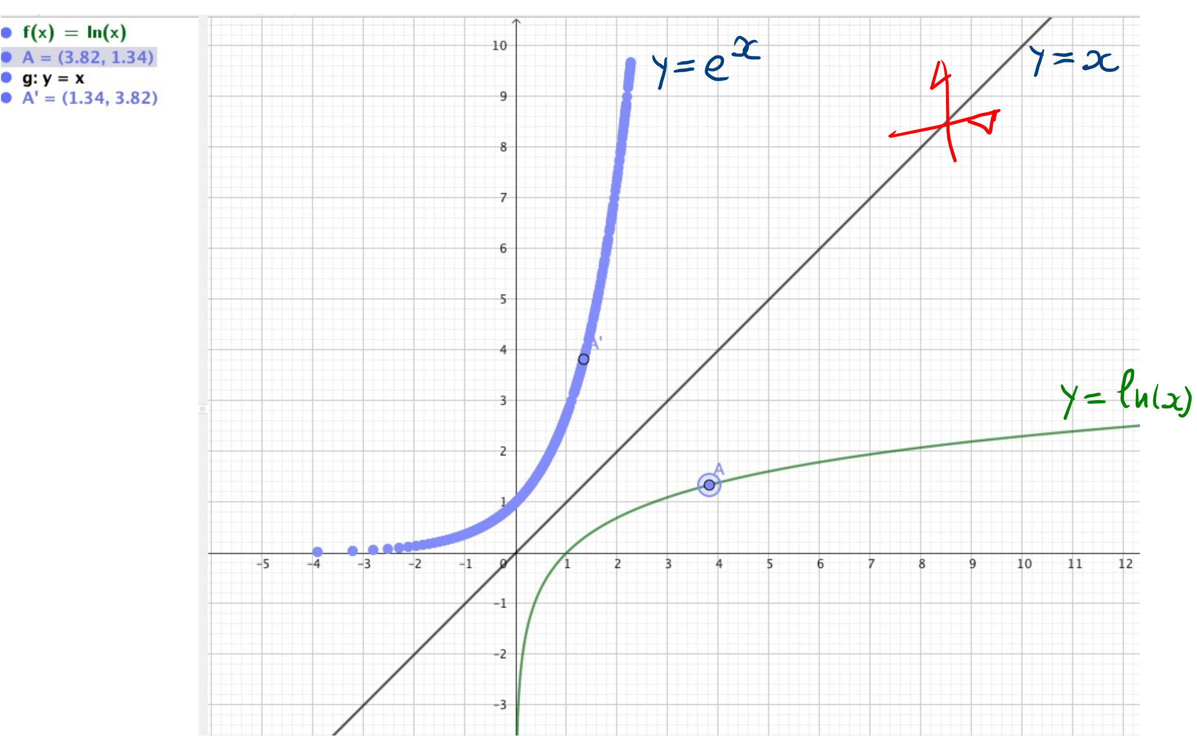
Nous avons vu que ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Ainsi, cette fonction admet une fonction réciproque

$$\begin{aligned} \exp_e : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

$\exp_e$ est une fonction strictement croissante.



$\boxed{\text{Observons que :} \quad y = e^{x} \iff x = \ln(y)}$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \ln(e^{x}) = x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad e^{\ln(x)} = x$

$f : A \longrightarrow B$ bijective

${}^r f : B \longrightarrow A$ bijective

Soit f une fonction bijective dérivable en a et $b = f(a)$,

comment calculer ${}^r f'(b)$?

Soit $g = {}^r f$

$$g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

Ainsi $(\exp_e)'(x) = \dfrac{1}{(\ln)'(y)} = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^{x}$

$$\boxed{(e^{x})' = e^{x}}$$

On peut démontrer que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e}$$

A partir de cette formule :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = e^{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}$$

$$\lim_{h \to 0} \left(1 + h\right)^{\frac{x}{h}} = e^{x}$$

$$\lim_{h \to 0} \left(1 + hx\right)^{\frac{1}{h}} = e^{x}$$

Calculons la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)}$$

$u = e^x - 1$

$x = \ln(u+1)$

$$= \frac{1}{\lim_{u\to 0} \ln\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)} = \frac{1}{\ln\left(\lim_{u\to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\right)} = \frac{1}{\ln(e)} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Une autre façon de calculer $(e^x)'$:

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^x$$

Résumé :

$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ AHG : $y = 0$

$\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ Pas d'asymptote à droite

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $(\ln|x|)'' = \frac{-1}{x^2}$

$(e^x)' = e^x$, $(e^x)'' = e^x$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, et $\int e^x\,dx = e^x + c$

2.3.1 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{5x}$

$(e^u)' = u' e^u$

$ED = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^{5x} \cdot (5x)' = 5 e^{5x}$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

signe de $x^2 + x = x(x+1)$

x		-1		0	
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$

$ED(f) =]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[$

$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+x}\right)' e^{\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot e^{\sqrt{x^2+x}}$

CRM : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

2.3.2 Calculer la dérivée d'ordre n de $f(x) = x\,e^x$.

$* \quad f'(x) = e^x + x\,e^x = (1+x)\,e^x$

$f''(x) = e^x + (1+x)\,e^x = (2+x)\,e^x$

$f'''(x) = e^x + (2+x)\,e^x = (3+x)\,e^x$

$f^{(n)}(x) = (n+x)\,e^x$

démontrons ce résultat par récurrence :

- vrai pour $n=1$ par $*$

- vrai pour $n \Rightarrow$ vrai pour $n+1$

$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((n+x)\,e^x\right)' = e^x + (n+x)\,e^x = \left((n+1)+x\right)e^x$

2.3.3 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2e^x$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = 2 - e^x$

d) $f(x) = e^{2-x}$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

d) $$\int e^{2-x} \, dx = -e^{2-x} + c$$

$$c = K e^{2-x}$$

$$c' = K \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = -K e^{2-x}$$

c) $$\int 2 - e^x \, dx = 2x - e^x + c$$

2.3.4 Calculer les intégrales suivantes :

c) $\int_0^2 x\, e^{x^2}\, dx$ $= \frac{1}{2} \left. e^{x^2} \right|_0^2 = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right) = \frac{e^4 - 1}{2}$

Déterminer $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

$c = K e^{x^2}$

$c' = K \cdot 2x \cdot e^{x^2} = 2K \cdot x e^{x^2} \Rightarrow 2K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(e^{x^2}) = 2x\, e^{x^2}$

e) $\int_0^1 x\, e^x\, dx = (x-1)\, e^x \Big|_0^1 = 0 - (0-1)\, e^0 = 1$

Par parties!

$\cancel{c = K e^x}$

$\cancel{c' = K e^x}$

$$\int x\, e^x\, dx = \int u' v = uv - \int u v'$$

$u' = e^x \;;\; u = e^x$

$v' = 1 \;;\; v = x$

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x = (x-1)\, e^x$$

f) $\int_1^{\ln(2)} x^2\, e^x\, dx$ par parties 2x