10.09.24

3.6.8 Calculer la distance du point P au plan α dans les cas suivants :

a) $P(-8;7;0)$ $\qquad \alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0,$

b) $P(6;1;-2)$ $\qquad \alpha : \begin{cases} x &= 3 - 4\lambda + 8\mu \\ y &= 2 - 3\lambda + 2\mu \\ z &= 1 + 3\lambda + 6\mu \end{cases}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Distance du point P au plan π $\qquad \delta(P;\pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

a) $\delta(P,\alpha) = \dfrac{|2\cdot(-8) - 2\cdot 7 + 1\cdot 0 + 6|}{3} = 8$

b) $\begin{cases} x = \boxed{3} - 4\lambda + 8\mu \\ y = \boxed{2} - 3\lambda + 2\mu \\ z = \boxed{1} + 3\lambda + 6\mu \end{cases} \begin{array}{c|c|c} & & \cdot 3 \\ & \cdot 1 & \\ & \cdot 1 & \cdot 4 \end{array} \quad \begin{cases} y + z = 3 + 8\mu \\ 3x + 4z = 13 + 48\mu \end{cases} \begin{array}{|l} \cdot 6 \\ \cdot(-1) \end{array}$

$-3x + 6y + 2z = 5$

(α) : $3x - 6y - 2z + 5 = 0$

2ème méthode

$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -24 \\ -8 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

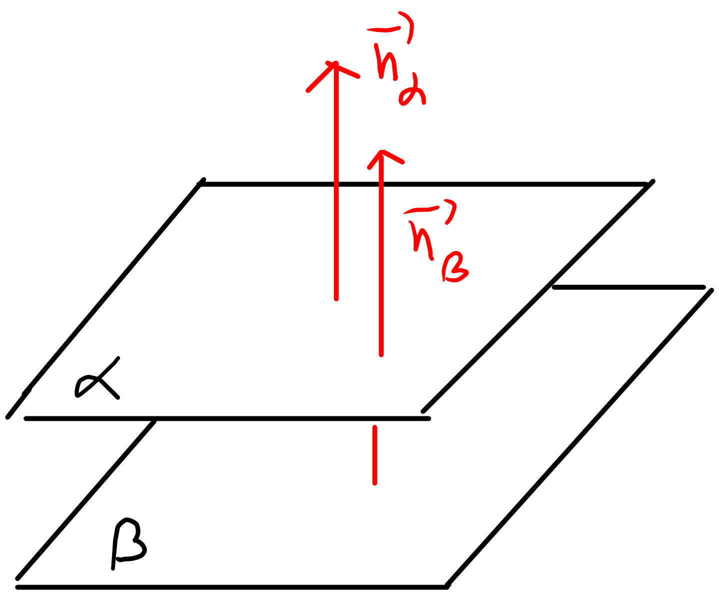
(α) : $3x - 6y - 2z + d = 0$

$A(3;2;1) \in \alpha \quad \Rightarrow \quad d = 5$

3.6.9 Vérifier que les plans d'équations $3x + 12y - 4z = 18$ et $-6x - 24y + 8z - 146 = 0$ sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.

$(\alpha): \quad 3x + 12y - 4z - 18 = 0 \qquad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

$(\beta): \quad 6x + 24y - 8z + 146 = 0 \qquad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$



$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\alpha$

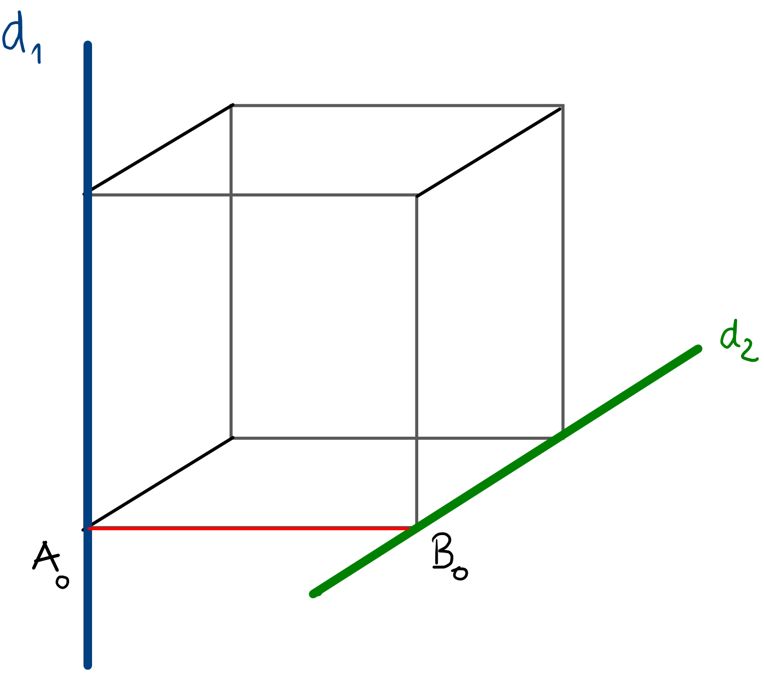
α, β parallèles ou confondus.

$(\beta): \quad 3x + 12y - 4z + 73 = 0 \quad \Rightarrow$ parallèles

$A(6 \,;\, 0 \,;\, 0) \qquad A \notin \beta$

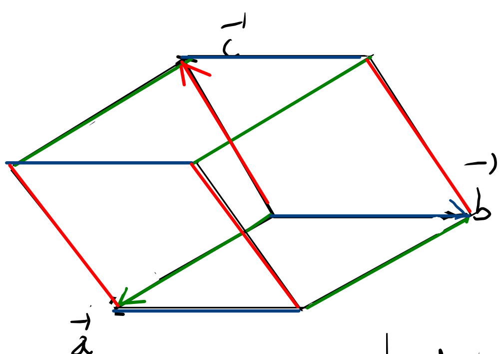
$$d(A, \beta) = \frac{|6 \cdot 6 + 146|}{26} = 7$$

Distance entre deux droites non parallèles



La distance minimale entre d_1 et d_2 existe.

Elle est réalisée par la longueur d'un élastique dont une extrémité est fixée sur d_1 et l'autre extrémité est sur d_2



Volume parallélépipède $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$V = \left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right| = \left| \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$$

$$\frac{\left| \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|}{\| \vec{a} \times \vec{b} \|} = \frac{\text{Volume}}{\text{base}}$$

$$\delta(d_1, d_2) = \frac{\left| \det\left(\vec{d_1}, \vec{d_2}, \overrightarrow{A_0B_0} \right) \right|}{\| \vec{d_1} \times \vec{d_2} \|}$$

Distance de deux droites non parallèles

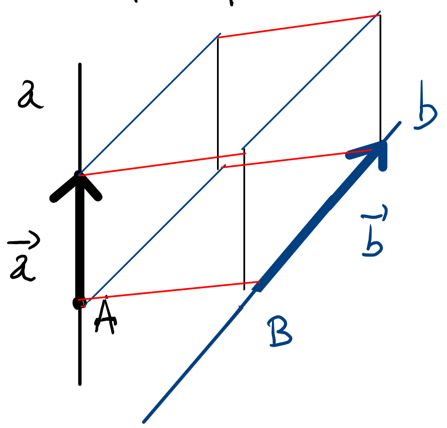
$$\delta(d_1; d_2) = \frac{\left| (\vec{d_1} \times \vec{d_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_2} \right|}{\| \vec{d_1} \times \vec{d_2} \|}$$

3.6.6 Calculer la distance des droites a et b lorsque :

a) $a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$ $\quad b : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{R}$

b) $a : \dfrac{x-3}{-6} = y+1 = \dfrac{z-4}{2}$ $\quad b : \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = k - 4 \\ z = k + 1 \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$

a) a pas parallèle à b



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Volume : $\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right|$

Règle Sarrus

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \\ -3 & -2 \end{matrix} = 0 + 3 + 8 - 0 - 2 - 0 = 9$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{64 + 1 + 16} = 9$

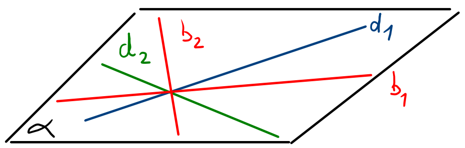
$\delta(a, b) = \dfrac{9}{9} = 1$

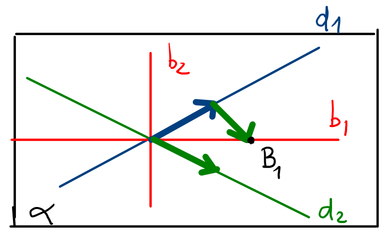
b) ; 3.6.7 ; 3.6.11

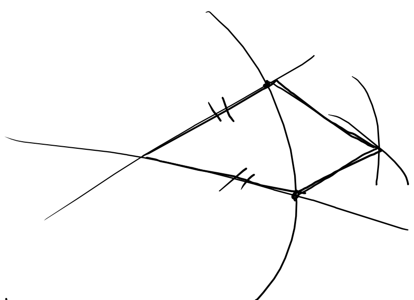
3.6.7 Considérons les droites concourantes d_1 et d_2 données ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2n \\ y = 4 - n \\ z = 2 - 3n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations paramétriques de leurs bissectrices b_1 et b_2.







$\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{d_1}\| = \|\vec{d_2}\|$

$\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Les vecteurs directeurs des bissectrices : $\vec{d_1} + \vec{d_2}$ et $\vec{d_1} - \vec{d_2}$

Déterminons le point d'intersection des deux droites :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2n \\ y = 4 - n \\ z = 2 - 3n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 2 + k = 2n \\ 3 + 3k = 4 - n \\ -1 + 2k = 2 - 3n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2n = -2 \\ 3k + n = 1 \\ 2k + 3n = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} k & n \\ 3 & \cdot 1 \\ \cdot(-1) & \cdot 2 \end{array}$$

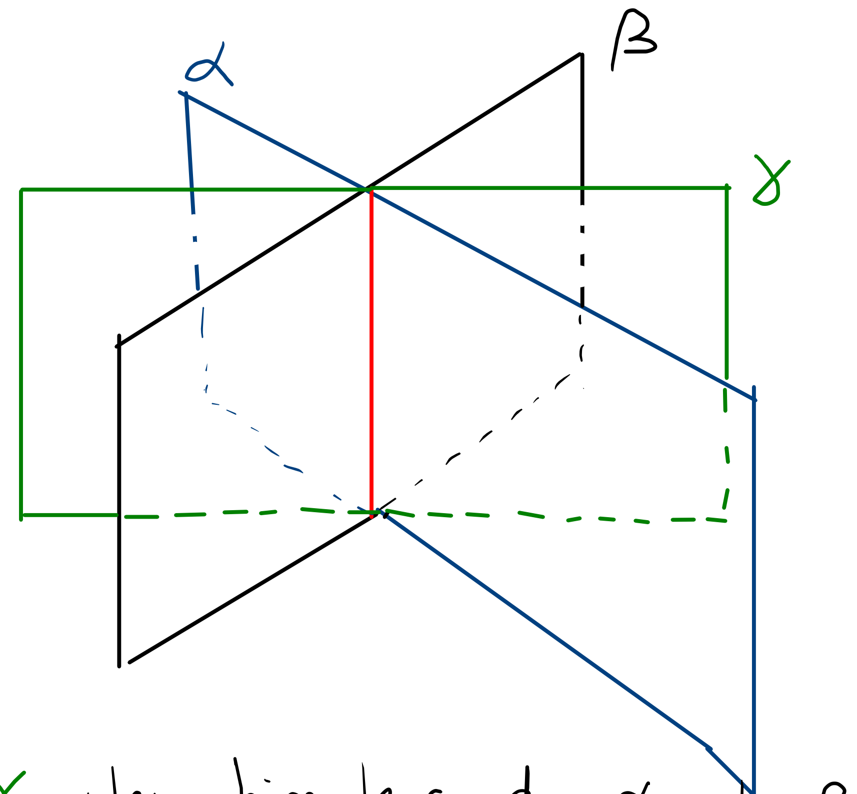
$$\Rightarrow \begin{cases} -7n = -7 \\ 7k = 0 \\ 2k + 3n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ k = 0 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 \quad \checkmark \end{cases} \qquad I(2\,;3\,;-1)$$

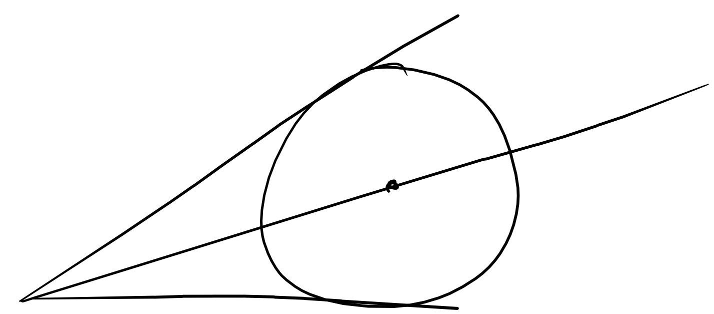
$$\vec{d_1} + \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d_1} - \vec{d_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(b_1) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \quad (b_2) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Plans bissecteurs





$(\alpha): \quad a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

$(\beta): \quad a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

γ plan bissecteur de α et β

$\forall \ P \in \gamma \qquad d(P,\alpha) = d(P,\beta)$

Les deux plans bissecteurs forment le lieu géométrique des points équidistants à α et β

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

CRM

Plans bissecteurs $\quad \dfrac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2}} = \pm \dfrac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2}}$