

1.1.13 Calculer l'inverse de chacune des matrices ci-dessous :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$, où I_n est la matrice identité.

On note $B = A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Par des opérations élémentaires sur les lignes, on fait apparaître la matrice identité sur la partie de gauche

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I_3$$

Calculer A^{-1} pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1, 1, 13

b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow (-1) \cdot L_2 \\ L_3 \leftarrow (-2) \cdot L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

A^{-1}

1.1.15 Résoudre les systèmes suivants à l'aide d'un calcul d'inverse de matrice :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5 \\ x + z = -2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 5y + 4z = 3 \\ 4x + 5y + 4z = 0 \\ -x - y - z = 2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 5 \\ 3x + 5y + z = 10 \end{cases}$$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit : $A \cdot X = Y$

Donc si A est inversible, on a

$$A^{-1}(A \cdot X) = A^{-1}Y$$

$$(A^{-1} \cdot A) X = A^{-1}Y$$

$$X = A^{-1}Y$$

Inversons, si possible, la matrice A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

La solution du système :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & +6 \\ 2 & +3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \{ (-1; 5; -1) \}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 5 \\ 3x + 5y + z = 10 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

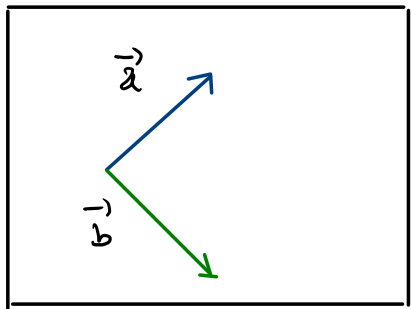
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{32} & \frac{13}{32} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{13}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{32} & \frac{13}{32} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{13}{32} & \frac{1}{32} & -\frac{5}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{32} + \frac{65}{32} - \frac{10}{32} \\ -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{10}{4} \\ \frac{13}{32} + \frac{5}{32} - \frac{50}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

→ Mercredi 1.1.15

Les espaces vectoriels

Exemple 1



plan vectoriel V_2

Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan vectoriel V_2

addition $\vec{a} + \vec{b}$

- Cette opération est commutative, • associative, • elle admet un élément neutre, $\vec{0}$, et • tout élément admet un inverse.

Tout vecteur peut être multiplié par un nombre réel $\vec{a}$ et son multiple $-\vec{a}$

$$\lambda \cdot \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 2

On prend comme ensemble les matrices 2×2

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix}$$

Dans ces deux exemples $(V_2, +, \cdot)$ et $(M_{2 \times 2}, +, \cdot)$

sont des espaces vectoriels réels