12.09.24

3.6.11 Déterminer les équations des plans bissecteurs des plans $\alpha : 3x + 6z = 2y + 20$ et $\beta : z + 2 = 0$.

$(\alpha) : \quad 3x - 2y + 6z - 20 = 0$

$(\beta) : \quad z + 2 = 0$

Deux plans bissecteurs : $\dfrac{3x - 2y + 6z - 20}{\sqrt{9+4+36}} = \pm \dfrac{z+2}{1}$

"+" : $\dfrac{3x - 2y + 6z - 20}{7} = \dfrac{z+2}{1}$

$3x - 2y + 6z - 20 = 7z + 14$

$(\lambda_1) : 3x - 2y - z - 34 = 0$

"−" : $\dfrac{3x - 2y + 6z - 20}{7} = -\dfrac{z+2}{1}$

$3x - 2y + 6z - 20 = -7z - 14$

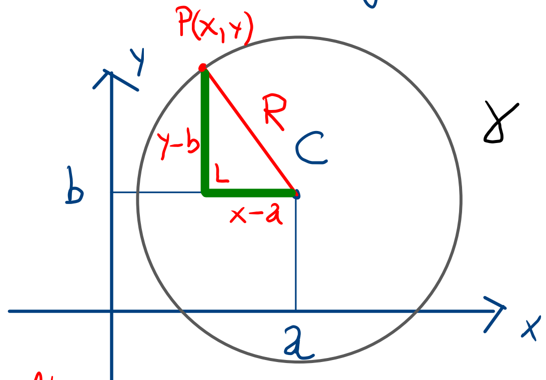
$(\lambda_2) : 3x - 2y + 13z - 6 = 0$

$\vec{n}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \perp \quad \vec{n}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_{\lambda_1} \cdot \vec{n}_{\lambda_2} = 9 + 4 - 13 = 0$

Le cercle dans le plan

L'équation du cercle de centre $C(a,b)$ et de rayon R est donné par



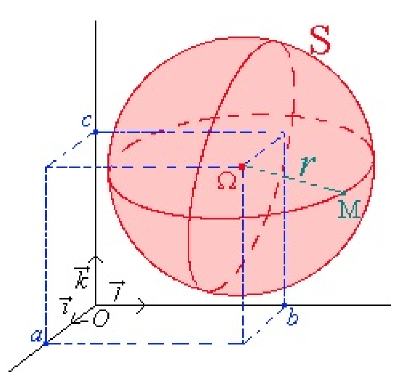
$$(\gamma) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

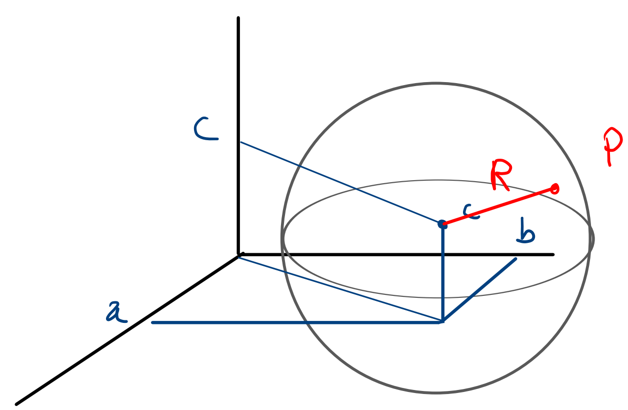
⚠ Il n'y a pas d'équation de cercle dans l'espace.

La sphère

L'équation de la sphère de centre $C(a,b,c)$ et de rayon R est donné par

$$(\Sigma) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$





$$\vec{CP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

3.7.1 Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent une sphère.
Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon de la sphère :

a) $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x = 14y + 8z - 69$

d) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 108x + 96y + 109 = 144z$

a) $(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = 9$

$C(2\,;0\,;-1)$

$\downarrow$

$R = 3$

b) $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 6z + 9 = -56 + 36 + 1 + 9$

$(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = -10$

ne représente rien !

c) $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 + z^2 - 8z + 16 = -69 + 4 + 49 + 16$

$(x+2)^2 + (y-7)^2 + (z-4)^2 = 0$

Point $(-2\,;7\,;4)$

d) $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 108x + 96y + 109 = 144z$

$36x^2 - 108x + 36y^2 + 96y + 36z^2 - 144z = -109 \quad \Big| \div 36$

$x^2 - 3x + y^2 + \frac{8}{3}y + z^2 - 4z = \frac{-109}{36}$

$(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{4}{3})^2 + (z-2)^2 = \frac{-109}{36} + \frac{9}{4} + \frac{16}{9} + 4$

$(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{4}{3})^2 + (z-2)^2 = 5$

$C(\frac{3}{2}\,;-\frac{4}{3}\,;2)$ et $R = \sqrt{5}$

3.7.2 Déterminer l'équation des sphères définies par les conditions suivantes :

a) le centre est $C(0;2;-4)$ et le rayon est égal à 5,

b) le centre est $C(1;-2;4)$ et elle passe par le point $P(3;2;-1)$,

c) l'un de ses diamètres est $[AB]$, où $A(-1;0;5)$ et $B(7;4;-7)$,

a) $x^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 25$

b) $\vec{CP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{CP}\|^2 = 4 + 16 + 25 = 45$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 45$$

c) centre : $C(3;2;-1)$

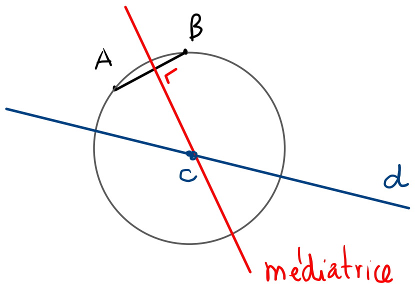
$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\qquad \|\vec{AC}\|^2 = 16 + 4 + 36 = 56$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 56$$

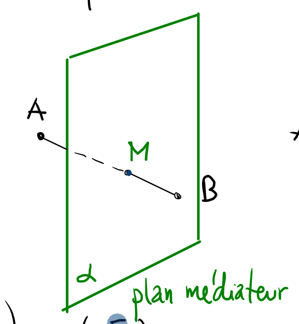
d) elle passe par les points $A(4;2;-3)$ et $B(-1;3;1)$, et a son centre sur la droite

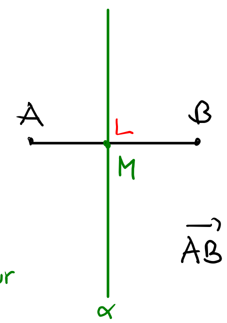
$d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}$

En 2D:



Le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés dans l'espace est un plan appelé le plan médiateur des points A et B.





$\vec{AB} \perp \alpha$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$(\alpha): \; 5x - y - 4z + d = 0$

$\alpha \ni M$ milieu de AB, $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -1\right)$

$\frac{15}{2} - \frac{5}{2} + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -9 \Rightarrow (\alpha): \; 5x - y - 4z - 9 = 0$

Le centre de la sphère se trouve à l'intersection de la droite d et de α.

$$\begin{cases} 5x - y - 4z - 9 = 0 & \alpha \\ x = 2 - k \\ y = 3 + 2k \\ z = 7 + 2k \end{cases}$$

$\Rightarrow 5(2-k) - (3+2k) - 4(7+2k) - 9 = 0$

Par substitution

$10 - 5k - 3 - 2k - 28 - 8k - 9 = 0$

$-15k = 30$

$k = -2$

D'où le centre de la sphère $C(4; -1; 3)$

Le rayon: $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ -1-2 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\|\vec{AC}\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

La sphère, enfin, $\boxed{(\Sigma): \; (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 45}$