12.12.24

2.2.41 Calculer l'aire du domaine compris entre les droites $x = 1$ et $x = 2$, l'asymptote oblique et le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

1) $ED(f) = \mathbb{R}^*$

2) Signe de $f(x)$:

x		0		1	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
		p		i	

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

3) Recherche de l'AO : $y = mx + h$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{x^3} = 1$$

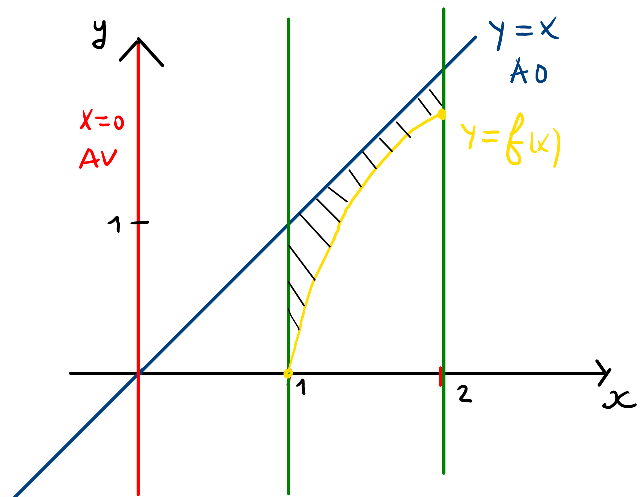
$$h = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 1 - x^3}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0$$

AO : $y = x$

Position entre la courbe et son AO :

x		0	
$\delta(x)$	$-$	$\Vert$	$-$
Position	au-dessous	$\Vert$	au-dessous



$$f(2) = \frac{8-1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

Aire cherchée :

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{AO} - \underbrace{\frac{x^3-1}{x^2}}_{\text{courbe}} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx = \int_1^2 x^{-2} dx = -x^{-1} \Big|_1^2 = \frac{-1}{x} \Big|_1^2 = \frac{-1}{2} - \left(\frac{-1}{1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

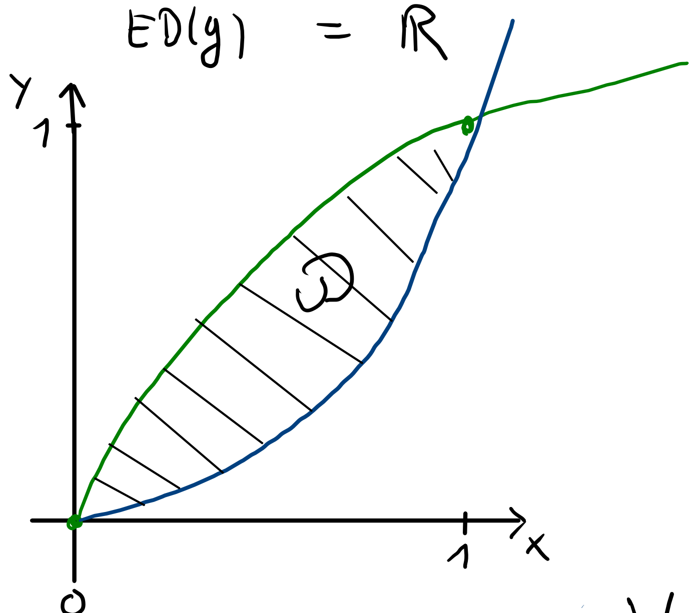
2.2.36 Le domaine délimité par les courbes d'équations $y = f(x)$, $y = g(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume :

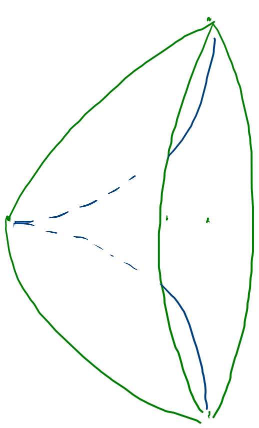
a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$

a) $ED(f) = \mathbb{R}_+$

$ED(g) = \mathbb{R}$





$$f(x) = g(x) \iff \sqrt{x} = x^2 \quad \Big| \; (\;)^2 \quad ⚠ \text{ vérif. sol.}$$

$$x = x^4$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$x = 0$ ✓ $\qquad$ $x = 1$ ✓

$f(0) = g(0) = 0 \qquad f(1) = g(1) = 1$

Volume engendré par la révolution du domaine D autour de Ox :

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 \, dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 \, dx$$

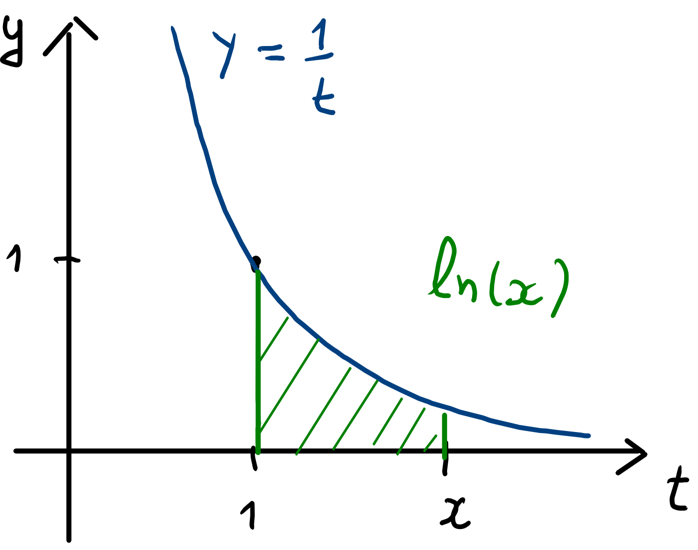
$$= \pi \int_0^1 x - x^4 \, dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}$$

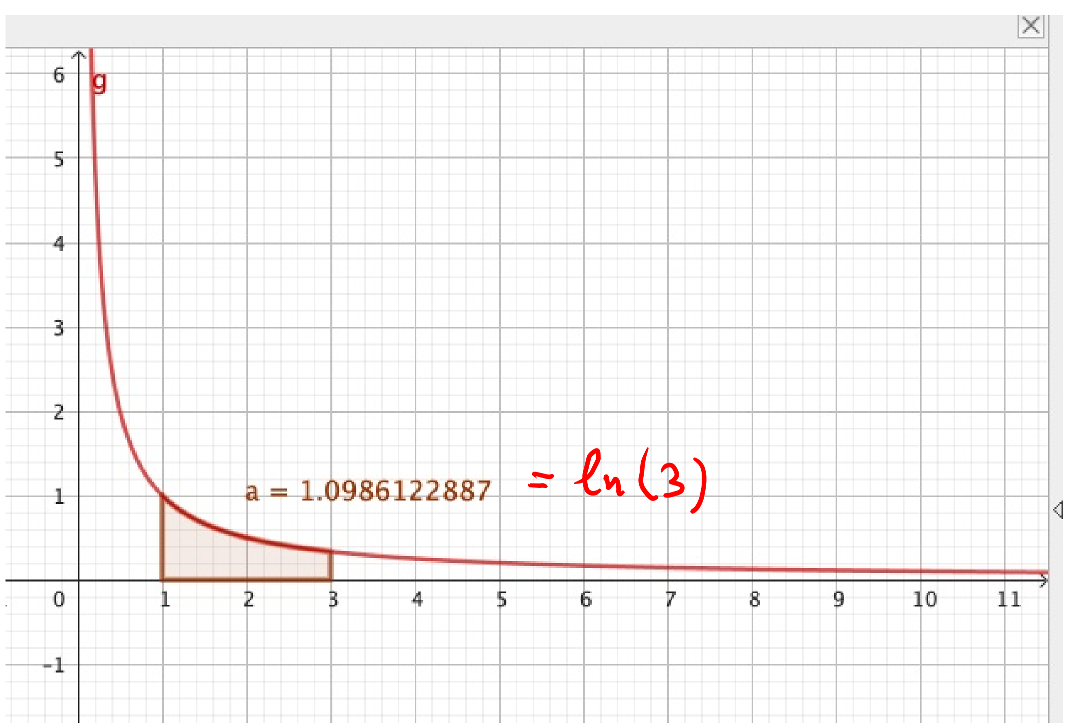
Fonctions logarithmiques et exponentielles

Nous savons que $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, pour $n \neq -1$

Définition : le log de $x > 0$

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$





1) On définit la fonction logarithmique naturelle

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(x)$$

2) La dérivée de la fonction $\ln$ est $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$, pour $x > 0$

3) On peut considérer que la dérivée de

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln(|x|)$$

est $\dfrac{1}{x}$. Donc

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$$

4) La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) $\ln(1) = 0$

$0 < x < 1$: $\ln(x) < 0$

$x > 1$: $\ln(x) > 0$

Propriétés de la fonction $\ln(x)$

Soit $a > 0$, $b > 0$ et $s \in \mathbb{R}$

1) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

2) $\ln(a^s) = s \cdot \ln(a)$

Démontrons ces deux propriétés.

1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}_+^*$
$\quad x \longmapsto \ln(Kx)$

Sa dérivée : $(\ln(Kx))' = \frac{1}{Kx} (Kx)' = \frac{1}{Kx} \cdot K = \frac{1}{x}$

Les dérivées de f et $\ln$ sont égales, ces deux fonctions diffèrent d'une constante

$$f(x) = \ln(x) + c$$

En particulier si $x = 1$: $f(1) = \ln(1) + c$

$\ln(K) = 0 + c \Rightarrow c = \ln(K)$

Ainsi $\ln(Kx) = \ln(x) + \ln(K)$

2) Soit $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \ln(x^r)$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^r} \cdot (x^r)' = \frac{1}{x^r} \cdot r \cdot x^{r-1} = r \cdot \frac{1}{x}$$

Les dérivées de $g(x)$ et $r \ln(x)$ sont égales.

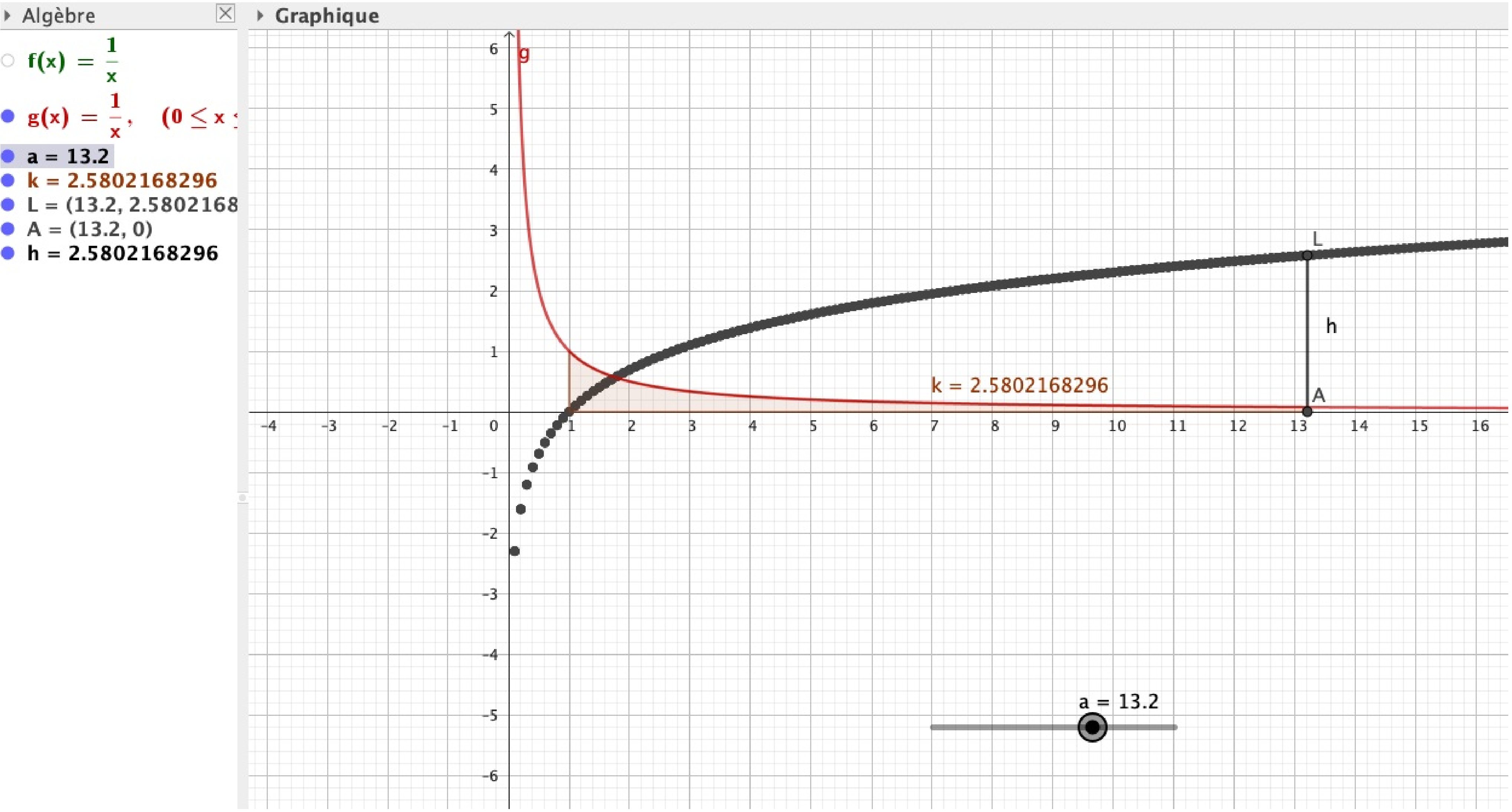
Ces deux fonctions diffèrent d'une constante

$$g(x) = r \cdot \ln(x) + c$$

En prenant $x = 1$: $g(1) = r \cdot \ln(1) + c$

$$\ln(1^r) = r \cdot \ln(1) + c \implies c = 0$$

On a donc $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$

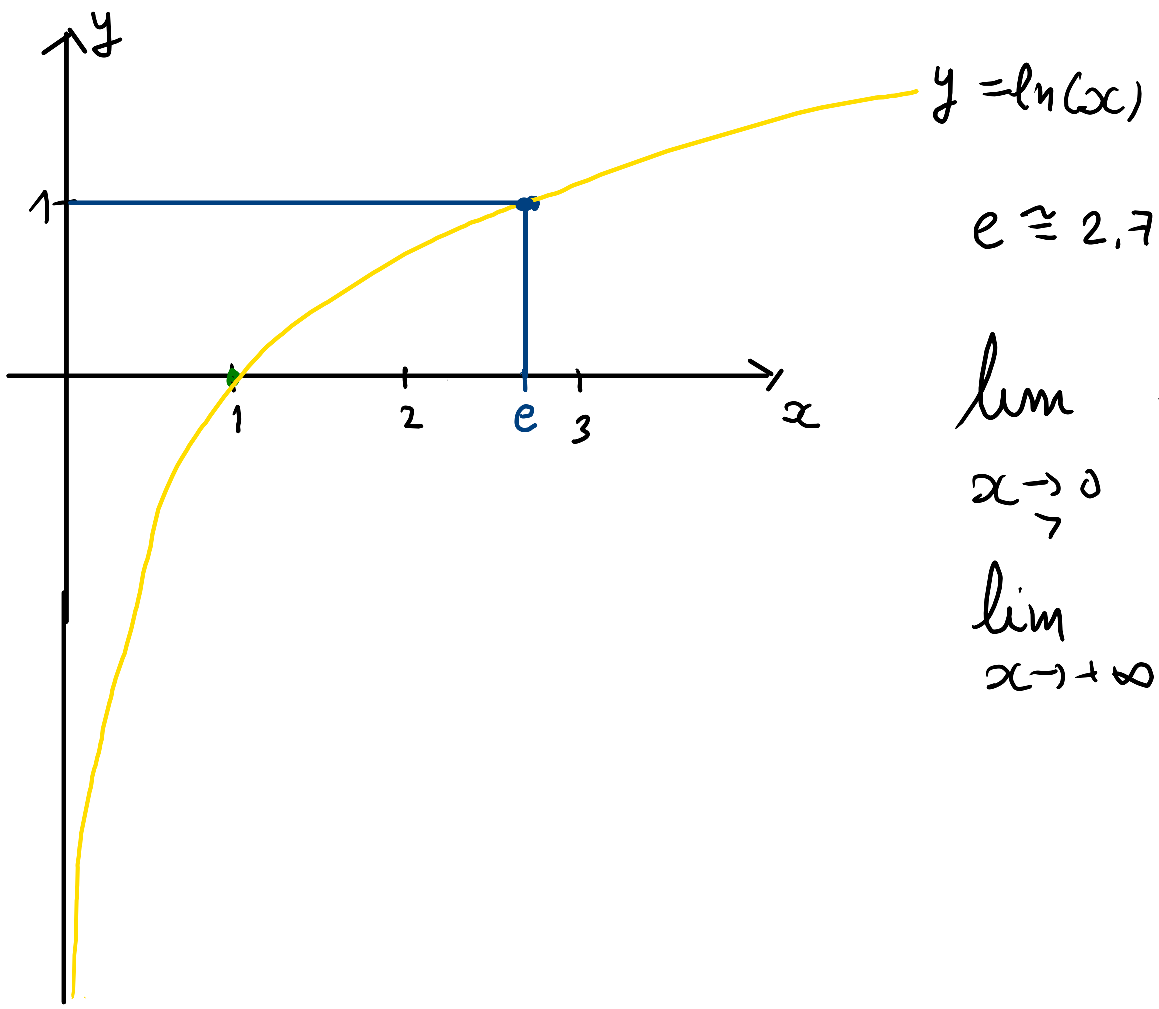


Algèbre
Graphique
f(x) = 1/x
g(x) = 1/x, (0 ≤ x
a = 13.2
k = 2.5802168296
L = (13.2, 2.5802168
A = (13.2, 0)
h = 2.5802168296
g
k = 2.5802168296
L
h
A
a = 13.2

3) Soit $a>0$, $b>0$. Calculons $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(ab^{-1}) = \ln(a) + \ln(b^{-1}) = \ln(a) - \ln(b)$$

4) Représentons le graphe de $\ln(x)$



$e \simeq 2{,}72$, $\ln(e) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty \Rightarrow$ AV à droite : $x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow$ pas d'AH à droite