17.09.24

**3.5.13** Deux plans sont donnés par leurs équations. Déterminer s'ils sont concourants, parallèles ou confondus et, selon les cas, leur intersection.

c) $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3k - 2n \\ y = 1 - k + n \\ z = 3 + k - n \end{cases}$, avec $k, n \in \mathbb{R}$ $\quad \beta : \begin{cases} x = 2 + p + 5q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 2q \end{cases}$, avec $p, q \in \mathbb{R}$

Vecteur normal à $\alpha$ : $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vecteur normal à $\beta$ : $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 5 \\ \vec{e}_2 & 0 & -2 \\ \vec{e}_3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_1 & 1 \\ \vec{e}_2 & 0 \\ \vec{e}_3 & 0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{n}_\beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ ou $\alpha \equiv \beta$

Déterminons l'équation cartésienne de $\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha) \quad \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -2 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & -2 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-1 & 3 \\ y-1 & -1 \\ z-3 & 1 \end{matrix} = (x-1) + 3(z-3) - 2(y-1) - 2(z-3) - (x-1) + 3(y-1) = 0$$

$(\alpha)$ : $(y-1) + (z-3) = 0$

$(\alpha)$ : $y + z - 4 = 0$

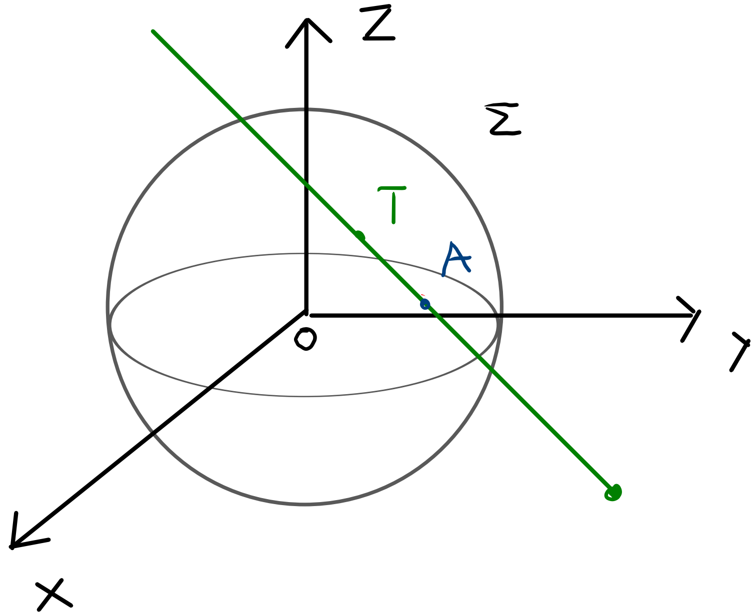
$B(2;2;2) \in \beta$ ; $\quad \delta(B, \alpha) = \dfrac{|2 + 2 - 4|}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow B \in \alpha$

Donc $\alpha \equiv \beta$.

3.7.2

e) elle est centrée à l'origine et tangente à la droite d'équation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $d$ avec $k \in \mathbb{R}$,

$A(3;5;5)$ $\qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$




CRM

$$(\Sigma) : \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\|\vec{OT}\| = R^2$$

$$\delta(O, d) = \frac{\|\vec{AO} \times \vec{d}\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{21}$$

$$\vec{AO} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+5 \\ -5-6 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On note $P$ un point et $d$ une droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{d}$.

| | |
|---|---|
| **Distance du point $P$ à la droite $d$** | $\delta(P; d) = \dfrac{\|\vec{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$ |

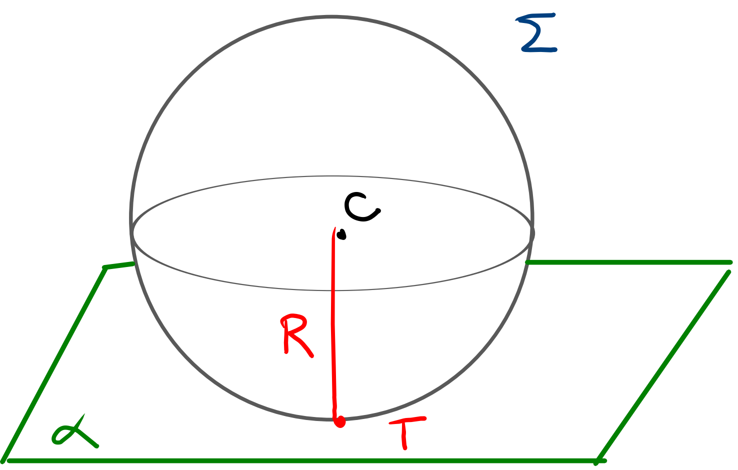
Finalement : $\boxed{(\Sigma) : \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{175}{3}}$

3.7.2

avec $k \in \mathbb{R}$,

f) le centre est $C(4; 1; -5)$ et elle est tangente au plan d'équation $x + 2y + 2z = 4$,

$$(\alpha) : x + 2y + 2z - 4 = 0$$




CRM

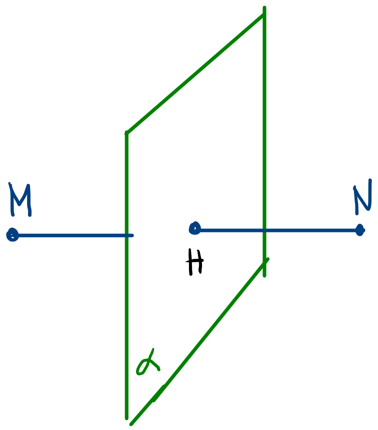
$$R = \delta(C, \alpha) = \frac{|4 + 2 - 10 - 4|}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{(\Sigma) : (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = \frac{64}{9}}$$

On note $P(x_0\,;y_0\,;z_0)$ un point et $\pi$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$

| | |
|---|---|
| **Distance du point $P$ au plan $\pi$** | $\delta(P;\pi) = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ |

g) elle passe par les points $M(0;3;-4)$, $N(2;2;-3)$ et $P(10;1;-8)$, et son rayon vaut $5\sqrt{2}$,




1) $\alpha$ : plan médiateur de MN

2) $\beta$ : plan médiateur de MP

3) $d = \alpha \cap \beta$

4) $C \in d$ , $\|\overrightarrow{CN}\| = 5\sqrt{2}$

1) Milieu de MN : $H\left(1\,;\frac{5}{2}\,;\frac{-7}{2}\right)$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \alpha$

$(\alpha) : 2x - y + z + d = 0$

$2 \cdot 1 - \frac{5}{2} - \frac{7}{2} + d = 0$

$2 - 2{,}5 - 3{,}5 + d = 0 \Rightarrow d = 4$

$$\boxed{(\alpha) : 2x - y + z + 4 = 0}$$

2) Milieu de MP ; $G(5\,;2\,;-6)$

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \beta$

$(\beta) : 5x - y - 2z + d = 0$

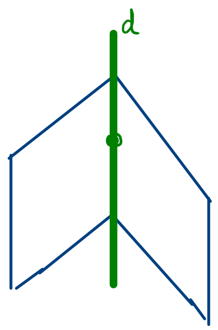
$d = -25 + 2 - 12 = -35$

$$\boxed{(\beta) : 5x - y - 2z - 35 = 0}$$

3) $\alpha \cap \beta$ :

$$\begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ 5x - y - 2z = 35 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = -4 - z \\ 5x - y = 35 + 2z \\ z = t \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} y & x \\ \cdot(-1) & \cdot 5 \\ 1 & \cdot(-2) \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} 3x = 39 + 3z \\ -3y = -90 - 9z \\ z = 0 + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 13 + t \\ y = 30 + 3t \\ z = 0 + t \end{cases} \iff \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

4) 


Soit $C \in d$ : $C(13+t \,;\, 30+3t \,;\, t)$

$$\vec{CM} = \vec{OM} - \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13+t \\ 30+3t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13-t \\ -27-3t \\ -4-t \end{pmatrix}$$

ou $\vec{MC} = \begin{pmatrix} t+13 \\ 3t+27 \\ t+4 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{MC}\|^2 = 50 \iff (t+13)^2 + (3t+27)^2 + (t+4)^2 = 50$$

$11t^2 + 196t + 914 = 50$ ⚠ aux calculs

$11t^2 + 196t + 864 = 0$ (on résout avec $\Delta$)

$(11t + 108)(t + 8) = 0$

$t = -8 \Rightarrow C_1(5 \,;\, 6 \,;\, -8)$

$t = -\frac{108}{11} \Rightarrow C_2\left(\frac{35}{11} \,;\, \frac{6}{11} \,;\, -\frac{108}{11}\right)$

d'où les deux sphères :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\Sigma_1) : & (x-5)^2 + (y-6)^2 + (z+8)^2 = 50 \\ (\Sigma_2) : & \left(x - \frac{35}{11}\right)^2 + \left(y - \frac{6}{11}\right)^2 + \left(z + \frac{108}{11}\right)^2 = 50 \end{array}}$$

h) elle passe par les points $R(-2;2;3)$, $S(0;4;1)$ et $T(-5;5;-1)$, et a son centre sur le plan d'équation $x+3y=2z+7$,

$(\Pi)$ : $x+3y-2z-7=0$

1) Plan médiateur de RS : $\alpha$

2) Plan médiateur de RT : $\beta$

3) Intersection des 3 plans $\alpha$, $\beta$ et $\Pi$

$$\begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \Pi \end{array} \begin{cases} \dots \\ \dots \\ x+3y-2z-7=0 \end{cases} \qquad C(\quad)$$

4) Rayon $\|\vec{CR}\|$