18.12.24

1.2.24 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x; y; z; t) \mid y + z + t = 0\}, \quad G = \{(x; y; z; t) \mid x + y = 0 \quad \text{et} \quad z = 2t\}$$

Déterminer la dimension et une base de F, G et $F \cap G$.

a) Dimension et base de F

F semble être de dimension 3

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \\ t = -y - z \end{cases} \quad \text{variables libres}$$

$$\mathcal{B}_F = \big((1,0,0,0), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1) \big)$$

b) Dimension et base de G

G semble être de dimension 2

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -x \\ z = 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_G = \big((1,-1,0,0), (0,0,2,1) \big)$$

c) Dimension et base de $F \cap G$

$h \in F$: $h = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,1,-1) = (a, b, c, -b-c)$

$h \in G$: $h = d(1,-1,0,0) + e(0,0,2,1) = (d, -d, 2e, e)$

d'où le système :

$$\begin{cases} a = d \\ b = -d \\ c = 2e \\ -b - c = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b = d \\ -b = 3e \\ c = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3e \\ b = -3e \\ c = 2e \\ d = 3e \\ e \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Base de $F \cap G$ qui est de dimension 1 :

$$\mathcal{B}_{F \cap G} = \big((3; -3; 2; 1) \big) \qquad \left(-1; \tfrac{2}{3}; 1, \tfrac{1}{3}\right)$$

1.2.26 Trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par :

$$<\{(3;2;-2);(7;-3;1);(-11;8;-4);(4;-5;3)\}>$$

$F = < ((3;2;-2), (7,-3,1), (-11,8,-4), (4,-5,3)) > = < (f_1, f_2, f_3, f_4) >$

Trouver dim (F) et une base de F.

On sait que $1 \leq \dim(F) \leq 3$

On "voit" que
$f_1 + f_4 = f_2$

$-f_2 - f_4 = f_3$

$-(f_1+f_4) - f_4 = -f_1 - 2f_4 = f_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_2 = f_1 + f_4 \\ f_3 = -f_1 - 2f_4 \end{cases}$$

Comme f_1 et f_4 sont linéairement indépendants

$\mathcal{B}_F = (f_1, f_4) \Rightarrow \dim(F) = 2$

2ème méthode: Calculons la dimension de F :

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \\ -11 & 8 & -4 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \\ -11 & 8 & -4 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{-1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{7} L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-5}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{-5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \boxed{\frac{23}{28}} & \frac{-17}{28} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang 2 $\Rightarrow \dim(F) = 2$

1.2.29 Soit $F = \langle(1;3;-3;-1;-4);(1;4;-1;-2;-2);(2;9;0;-5;-2)\rangle$ et $G = \langle(1;6;2;-2;3);$ $(2;8;-1;-6;-5);(1;3;-1;-5;-6)\rangle$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$. Calculer $\dim(F+G)$ et $\dim(F\cap G)$.

$$F = \langle(1;3;-3;-1;-4);(1;4;-1;-2;-2);(2;9;0;-5;-2)\rangle = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$$

$$G = \langle(1;6;2;-2;3);\ (2;8;-1;-6;-5);(1;3;-1;-5;-6)\rangle = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$$

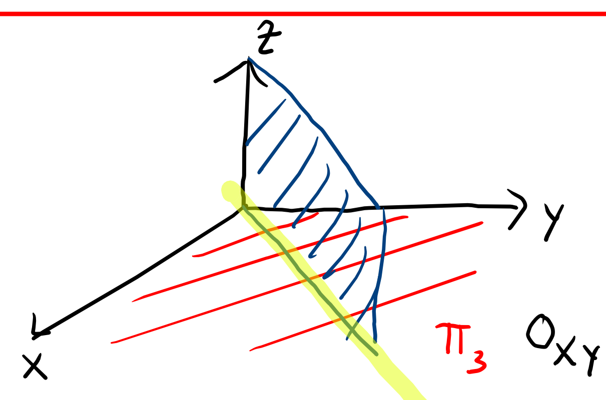
<u>Définition</u> Soit F et G deux sev d'un ev V. Alors les sous-ensembles

1) $F \cap G = \{ x \in V \mid x \in F \text{ et } x \in G \}$

2) $F + G = \{ x \in V \mid \exists f \in F \text{ et } g \in G \text{ tels que } x = f + g \}$

sont des sev de V

$$\boxed{\underline{\text{Théorème}} : \quad \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G)}$$



$$3 = 2 + 2 - 1$$