19.12.24

Intersection de sous-espaces vectoriels

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel V est un espace vectoriel

En effet, si $u, v \in F \cap G$, alors $\alpha u + \beta v \in F \cap G$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit F, G deux sev d'un ev V.

On note $F + G = \{ f + g \mid f \in F, g \in G \}$

Il découle de la définition d'un ev que $F + G$ est un ev

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On dit que la somme est directe si $F \cap G = \{0\}$.

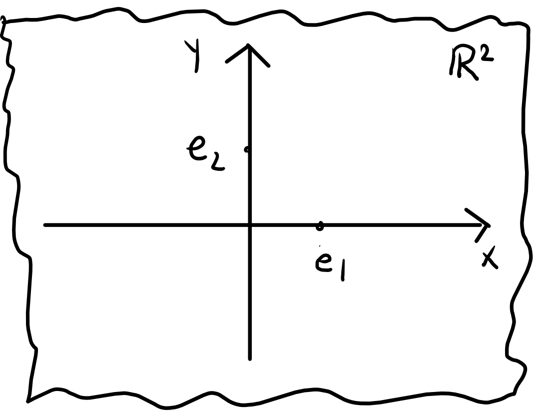
Donc tout élément de $F + G$ s'écrit de façon unique avec un élément de F et un élément de G.

On note $F \oplus G$,

On a la relation suivante :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$$

Exemples



①

$E_1 = \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R} \}$

$E_2 = \{ (0,y) \mid y \in \mathbb{R} \}$

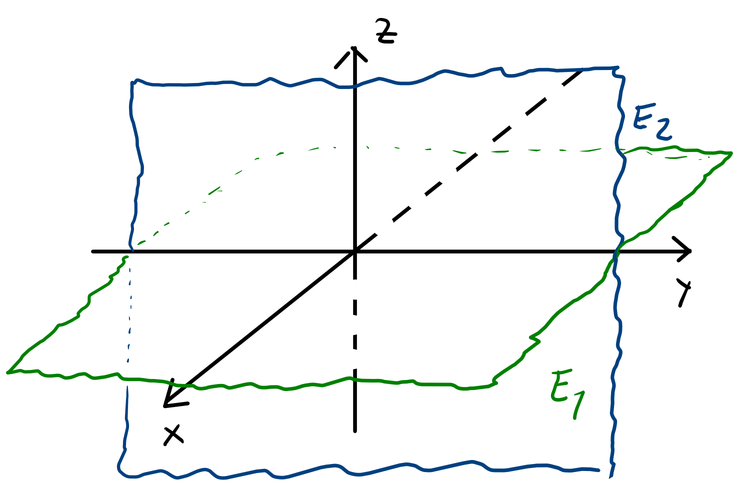
- E_1, E_2 deux sev de $\mathbb{R}^2$
- $E_1 \cap E_2 = \{ (0,0) \}$

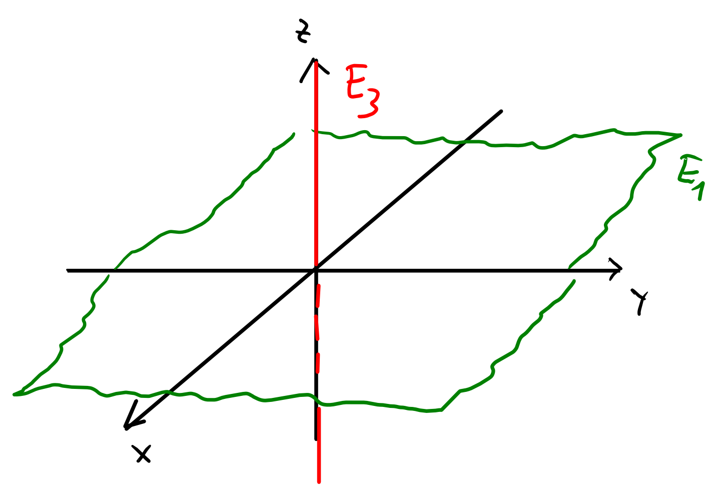
$\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$

② $E_1 = \{ (x,y,0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$E_2 = \{ (0,y,z) \mid y, z \in \mathbb{R} \}$

$E_3 = \{ (0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}$





$E_1 \cap E_2 = \{ (0,y,0) \mid y \in \mathbb{R} \}$

$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$

$E_1 \cap E_3 = \{ (0,0,0) \}$

$E_1 \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$

1.2.31 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux sous-espaces vectoriels A et B. Dans les trois cas ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

– $\mathbb{R}^3$ est-il la somme de A et B ?

– $\mathbb{R}^3$ est-il la somme directe de A et B ? Si ce n'est pas le cas, déterminer $A \cap B$.

a) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

b) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

c) $A = \{(x; y; -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; 2a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) $\dim(A) = 2$, $\dim(B) = 1$

Base de A : $\mathcal{B}_A = \big((1,0,0), (0,1,1)\big)$

Base de B : $\mathcal{B}_B = \big((1,1,1)\big)$

$$(1,2,-4) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 2 \\ \beta + \gamma = -4 \end{cases}$$ système impossible , donc $F + G \subsetneq \mathbb{R}^3$

$F + G \neq \mathbb{R}^3$

On a $B \subset A$.

b) $\dim(A) = 2$, $\dim(B) = 1$

Base de A : $\mathcal{B}_A = \big((1,0,0), (0,1,1)\big)$

Base de B : $\mathcal{B}_B = \big((1,1,-1)\big)$

Déterminons si $A + B = \mathbb{R}^3$

$$(x, y, y) + (a, a, -a) = (r, s, t) \qquad r, s, t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x + a = r \\ y + a = s \\ y - a = t \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = s + t \\ 2a = s - t \\ x = r - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \\ a = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \\ x = r - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t \end{cases}$$

$$\underset{(\quad x \quad , \quad y \quad , \quad y \quad) + (\quad a \quad , \quad a, \quad -a \quad)}{\left(r - \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t\right) + \left(\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}t, -\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t\right)} = (r, s, t)$$

Donc $\mathbb{R}^3 = A + B$

Déterminons $A \cap B$:

$$\begin{cases} x = a \\ y = a \\ y = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ a = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{(0,0,0)\}$$

Finalement $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$

c) $A = \{(x; y; -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; 2a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

$$\mathcal{B}_A = \big((1,0,0) , (0,1,-1) \big) \qquad \dim(A) = 2$$

$$\mathcal{B}_B = \big((1,2,0), (0,0,1) \big) \qquad \dim(B) = 2$$

$$A + B \overset{?}{=} \mathbb{R}^3$$

Quel est la dim du sev $\langle \big((1,0,0), (0,1,-1), (1,2,0), (0,0,1) \big) \rangle$

Quel est le rang de cette matrice ?

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivot

de rang 3 $\Rightarrow$ $\dim(A+B) = 3$

donc $A + B = \mathbb{R}^3$

On a :

$$\dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A+B)$$

$$= 2 + 2 - 3 = 1$$

Donc la somme n'est pas directe.

1.2.27 , 1.2.28 , 1.2.32 mercredi 08.01.25