21.08.24

Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace

$V_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ $\qquad V_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$V_1 \cdot V_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}}_{\text{matrice : 1 ligne, 3 colonnes}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\text{matrice}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

3 lignes
1 colonne

Les matrices

Soit n, m deux entiers non nuls. Une matrice réelle de type $n \times m$ est un tableau rectangulaire qui contient n lignes et m colonnes de nombres réels, appelés les éléments de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 2$$

L'ensemble des matrices réelles de type 3×2 s'écrit

$$M_{3\times 2}[\mathbb{R}]$$

Si A est une matrice de type 3×2, on la note

$$A = (a_{ij}) \quad \text{où} \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 2$$

Dans $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $a_{12} = -5$; $a_{21} = \sqrt{2}$; a_{41} n'existe pas

Opérations sur les matrices

L'addition

Par exemple $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V_1 + V_2 = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} + \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \qquad B = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}} \qquad C = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}} \qquad D = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}$$

$A + B$ impossible

$$A + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ -2 & 12 & \end{pmatrix}$$

$B + C$ impossible

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont de même type, alors

$$A + B = (c_{ij}) \quad \text{où} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m$$

Matrices particulières

Soit A est une matrice de type $n \times m$.

1) Si $n = 1$, A est une matrice ligne $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$

2) Si $m = 1$, A est une matrice colonne $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

3) Si tous les éléments sont nuls, on parle de matrice nulle.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3$$

4) Si $n = m$, on parle de matrices carrées.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 3$$

Les éléments $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ s'appelent les éléments de la diagonale.

2) Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})$ de type $n \times m$.

$$\alpha A = (b_{ij}) \quad , \text{ avec } \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\text{où} \quad b_{ij} = \alpha \, a_{ij}$$

Exemples

1)
$$-2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

2)
$$-2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -8 & -12 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Soustraction de deux matrices

A, B de même type

$$A - B = A + (-1) \cdot B$$

Multiplication matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -13 \\ 14 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(2 \times 3) \qquad (3 \times 2) \qquad 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

a_{23}

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 4 \qquad 2 \times 4$$

1.1.2 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : AB, AC, $AB+AC$, $B+C$, $A(B+C)$, $A+B$, $(A+B)^2$, A^2, B^2, $A^2+2AB+B^2$, C^2, C^3 et C^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$AB =$ à calculer

$AC =$ à calculer

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$C^2 =$ $\qquad$ $C^{21} =$

$C^3 =$