

22.08.24

3.4.4 Montrer que les équations suivantes définissent toutes la même droite :

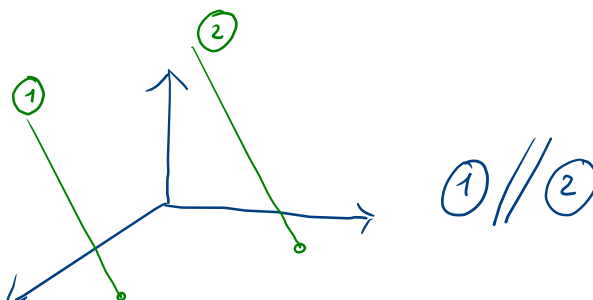
$$\textcircled{1} \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 + 4k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \textcircled{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ avec } u \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z - 3 = 0 \end{cases} \quad \textcircled{4} \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{8}$$

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$\sim \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



Point : $k = 0$ $A(-1; 3; -2)$

Point : $t = 1$ $B(-1, 3, -2)$

$$A \equiv B$$

Donc $\textcircled{1} \equiv \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ on a directement les éq. cartésiennes : $\frac{x - (-1)}{3} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - (-2)}{4}$

ou $\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{8} \equiv \textcircled{4}$

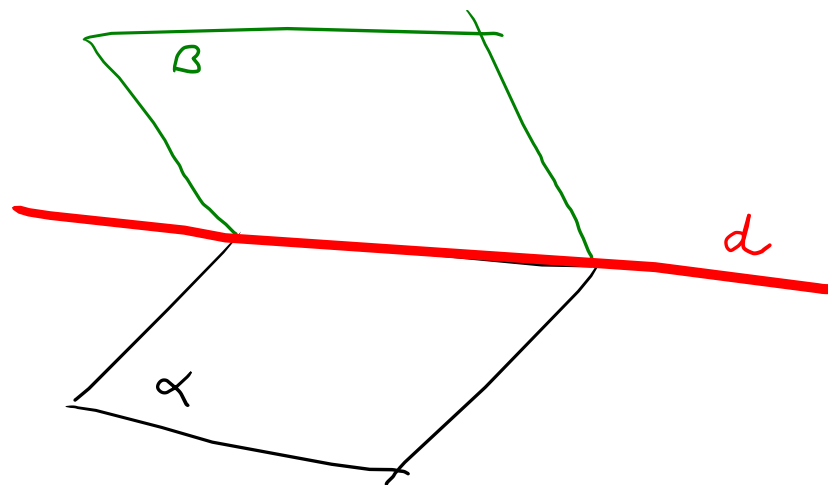
Démontrons que A et $C(-4; 1; -6)$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} A(-1, 3, -2) \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0 = 0 & \checkmark \\ 0 = 0 & \checkmark \end{array} \right. \end{matrix}$$

$$C(-4, 1, -6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 = 0 & \checkmark \\ 0 = 0 & \checkmark \end{array} \right.$$

Passage d'un système d'équations cartésiennes à une équation vectorielle

$$(d): \begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 & \alpha \\ 14x - y - 10z - 3 = 0 & \beta \end{cases}$$



Méthode 1

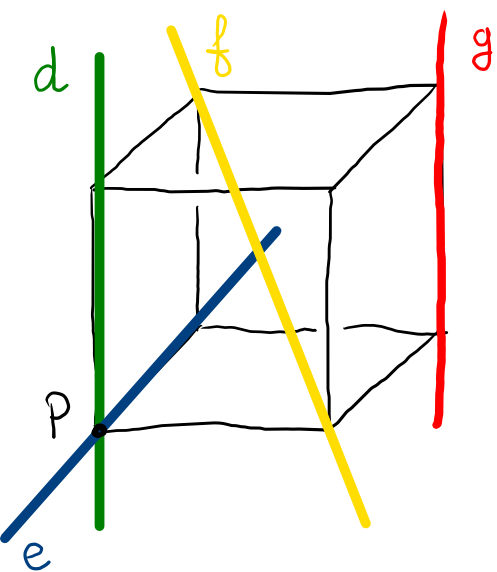
Deux points sur d :

$$\begin{aligned} y=0 &\Rightarrow (---; 0; ---) & \begin{cases} 16x - 11z = 0 \\ 14x - 10z = 3 \end{cases} \\ z=0 &\Rightarrow (---; ---; 0) & \begin{cases} 16x - 2y = 0 \\ 14x - y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned} \begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z = 3 \\ y = t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 16x - 11z = 2t \\ 14x - 10z = 3 + t \\ y = t \end{cases} & \begin{array}{c|c} x & z \\ \hline \cdot 14 & \cdot 10 \\ \cdot (-16) & \cdot (-11) \end{array} \\ & & \begin{array}{c} \begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z = -48 + 12t & | :6 \\ 6x = -33 + 9t & | :6 \\ y = t \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}t \\ y = t \\ z = -8 + 2t \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & & \sim \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \end{array} \end{aligned}$$

Positions de deux droites dans l'espace



$$d \parallel g$$

d et e sécantes en P

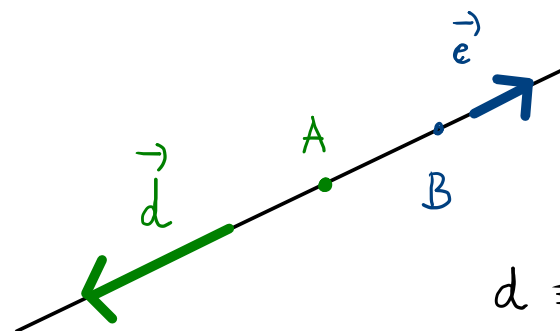
e et g gauches (orthogonales)

d et f gauches

$$d: A \vec{d}$$

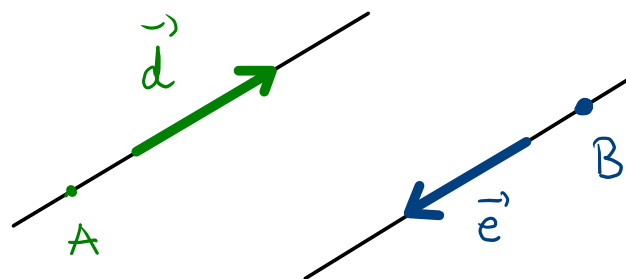
$$e: B \vec{e}$$

① Confondues



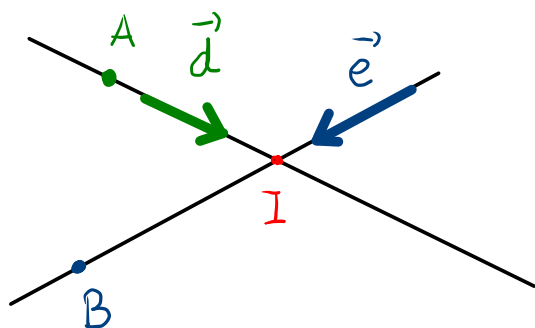
$$d = e \Leftrightarrow (\vec{d} \wedge \vec{e} = \underline{0} \text{ et } \vec{AB} \wedge \vec{d} = \underline{0})$$

② Parallèles



$$d \parallel e \Leftrightarrow (\vec{d} \wedge \vec{e} = \underline{0} \text{ et } \vec{AB} \not\wedge \vec{d})$$

③ Sécantes



$$d \cap e = \{I\}$$

$$d \text{ et } e \text{ sécantes} \Leftrightarrow \left(\exists k, t \in \mathbb{R} \text{ tq } \vec{OI} = \vec{OA} + k \vec{d} = \vec{OB} + t \vec{e} \right)$$

④ Gauches aucun des 3 cas ci-dessus

3.4.5 Deux droites d_1 et d_2 sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont concourantes, parallèles, confondues ou gauches et, selon les cas, leur éventuel point commun :

$$\text{a) } d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -2 - 5k \\ z = 5 + k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad d_2 : \begin{cases} x = -2 - 6n \\ y = 3 + 10n \\ z = 4 - 2n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$$

$$d_1 : D_1(1; -2; 5) \quad \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d_2 : D_2(-2; 3; 4) \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{D_1 D_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{d}_1$$

$$d_1 \equiv d_2$$

