3.7.3 Déterminer la position relative de la sphère $\Sigma : (x-3)^2+(y-5)^2+(z-10)^2 = 25$ et de la droite $d : \dfrac{x-7}{6} = \dfrac{y+4}{-6} = z-5$.

Centre $C(3; 5; 10)$ et le rayon 5

$$\delta(C, d) = \frac{\|\vec{AC} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|} = \frac{7\sqrt{73}}{\sqrt{73}} = 7$$

CRM

Distance du point P à la droite d $\qquad \delta(P; d) = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$

$$(d) : \frac{x-7}{6} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{1} \qquad A(7; -4; 5), \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\vec{AC} \times \vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ -30 \end{pmatrix}$; $\|\vec{AC} \times \vec{d}\| = 7\sqrt{73}$
- $\|\vec{d}\| = \sqrt{73}$

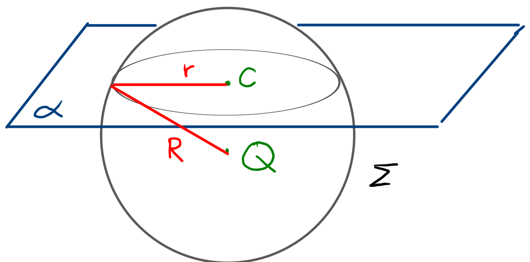
Comme $\delta(C, d) = 7 > 5$, Σ et d sont gauches.

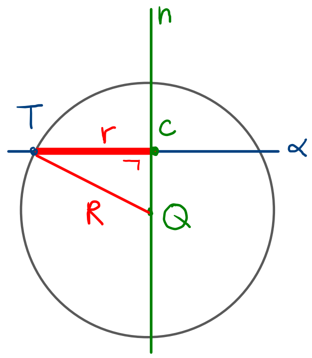
3.7.4 Le système d'équations $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$ détermine-t-il un cercle ? ~~Si~~ oui, calculer les coordonnées du centre C et le rayon r de ce cercle.

(Σ) : $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100 \\ 2x-2y-z+9=0 \end{cases}$ sphère $Q(3;-2;1)$ centre; $R=10$

(α) : plan

Dans l'espace, on ne peut pas donner l'équation d'un cercle avec une seule équation.





1) Calculons la distance de Q à α

$$\delta(Q,\alpha) = \frac{|2\cdot 3 - 2\cdot(-2) - 1 + 9|}{3} = \frac{|6+4-1+9|}{3} = 6 < 10 = R$$

Donc Σ coupe α.

2) Déterminons C et r.

Calculons les coordonnées de C, intersection de la normale n à α issue de Q.

$$(n): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{normal à } \alpha}$$

$n \cap \alpha$: $2(3+2k) - 2(-2-2k) - (1-k) + 9 = 0$

$$9k = -18$$
$$k = -2$$

$\Rightarrow \underline{\underline{C(-1;\,2;\,3)}}$

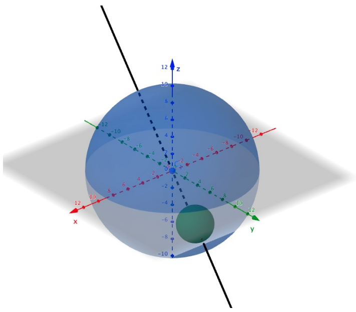
On calcule r avec Pythagore $r^2 = R^2 - QC^2$

$= 10^2 - 6^2 = 8^2 \Rightarrow \underline{\underline{r = 8}}$

3.7.5 Montrer que les deux sphères d'équations :

$$x^2+y^2+z^2=81 \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2+z^2-4x-12y+6z+45=0$$

sont tangentes intérieurement et déterminer l'équation cartésienne de leur plan tangent commun.



$(\Sigma_1): \; x^2+y^2+z^2 = 81$

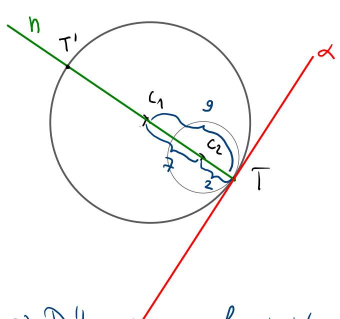
$C_1(0,0,0)$ et $R_1 = 9$

$(\Sigma_2): \; x^2-4x+4+y^2-12y+36+z^2+6z+9 = \underbrace{-45+4+36+9}_{4}$

$(x-2)^2+(y-6)^2+(z+3)^2$

$C_2(2\,;\,6\,;\,-3)$ et $R_2 = 2$

1) Les sphères sont tangentes intérieurement.



$C_1T = 9$

$C_2T = 2$

$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix}2\\6\\-3\end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{C_1C_2}\| = \sqrt{4+36+9} = 7$

2) Déterminons le point $T = \underbrace{C_1C_2}_{n} \cap \alpha$ ou T'

$(n): \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2\\6\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 6k \\ z = -3k \end{cases}$

$(\Sigma_1): \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 81 \\ x = 2k \\ y = 6k \\ z = -3k \end{cases}$

$\Rightarrow 4k^2+36k^2+9k^2 = 81$

$49k^2 = 81$

$k = \pm\sqrt{\frac{81}{49}} \Rightarrow k = \begin{cases} 9/7 \\ -9/7 \end{cases}$

$T_1\left(\frac{18}{7}; \frac{54}{7}; \frac{-27}{7}\right)$ et $T_2\left(\frac{-18}{7}; \frac{-54}{7}; \frac{27}{7}\right)$

$\overrightarrow{T_1C} = \begin{pmatrix}2\\6\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}18/7\\54/7\\-27/7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4/7\\-12/7\\6/7\end{pmatrix}$ $\|\overrightarrow{T_1C}\| = \frac{1}{7}\sqrt{4^2+12^2+6^2} = \frac{14}{7} = 2$ ouf !

$\Rightarrow T'\left(\frac{18}{7}; \frac{54}{7}; \frac{-27}{7}\right)$

Le plan cherché :

$(\alpha): \; 2x+6y-3z+d = 0$

$\Rightarrow \frac{36}{7}+\frac{324}{7}+\frac{81}{7} = -d \Rightarrow d = \frac{441}{7} = -63$

$(\alpha): \; 2x+6y-3z-63 = 0$

Deuxième méthode, sans passer par le point T.

$\alpha \perp n = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$(\alpha): \quad 2x + 6y - 3z + d = 0$

$$\delta(\alpha, C_1) = 9 \iff \frac{|d|}{7} = 9 \iff |d| = 63$$

Deux possibilités :

$(\alpha_1): \quad 2x + 6y - 3z - 63 = 0$

$(\alpha_2): \quad 2x + 6y - 3z + 63 = 0$

$$\delta(\alpha_1, C_2) = 2 \iff \frac{|2 \cdot 2 + 6 \cdot 6 - 3(-3) - 63|}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

α_1 est le plan cherché.