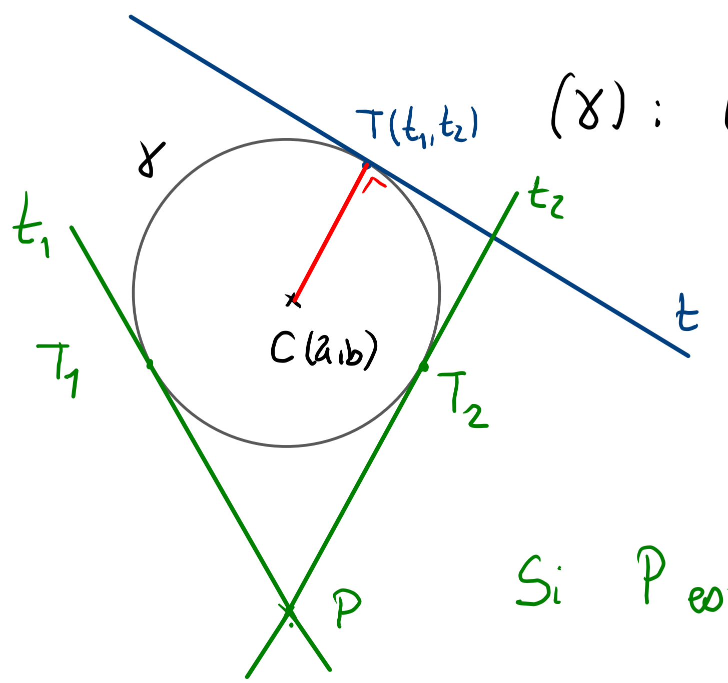
26.09.24

## Dans le plan




$$(\gamma):\ (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

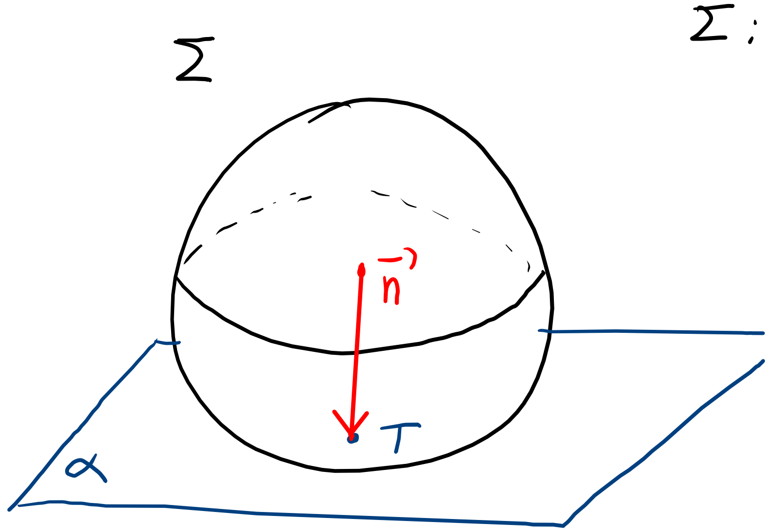
$$(\gamma):\ (x-a)(x-a)+(y-b)(y-b)=R^2$$

$$(t):\ (t_1-a)(x-a)+(t_2-b)(y-b)=R^2$$

Si $P$ est à l'extérieur de $\gamma$, il y a deux tangentes

**Tangentes de pente** $m$
$P\in t$ ou $P\in t'$ $\Leftrightarrow$ $y-y_0=m(x-x_0)\pm r\sqrt{m^2+1}$

## Dans l'espace




$$\Sigma:\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

$$\vec{n}\perp\alpha$$

Si $T\in\Sigma$, il existe un plan $\alpha$ tangent à $\Sigma$ en $T$

**3.7.6** On donne la sphère $\Sigma$ et le point $T$. Après avoir vérifié que $T$ appartient à $\Sigma$ , trouver l'équation cartésienne du plan tangent à $\Sigma$ au point $T$ :

a) $\Sigma : (x+3)^2 + (y-15)^2 + (z-2)^2 = 225$ $\qquad$ $T(7;4;4)$ ,

$T \in \Sigma$ : en effet $\quad 10^2 + 11^2 + 2^2 = 100 + 121 + 4 = 225$

$C(-3;15,2)$ centre de $\Sigma$

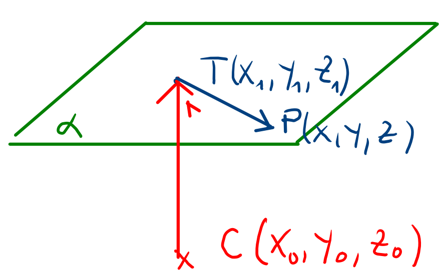
$\overrightarrow{TC} \perp \alpha$ : $\quad \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc : $(\alpha)$ : $\quad 10x - 11y + 2z + d = 0$

par $T$ : $\quad 70 - 44 + 8 = -d \Rightarrow d = -34$

$(\alpha)$ : $\quad 10x - 11y + 2z - 34 = 0$

<u>Méthode générale</u>




- $C(x_0, y_0, z_0)$ centre de $\Sigma$
- $T(x_1, y_1, z_1) \in \Sigma$

$\alpha$ plan tangent à $\Sigma$ par $T$

$$\overrightarrow{CT} \perp \overrightarrow{TP} \Rightarrow \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CT} \cdot (\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CT}) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CT} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = \underbrace{\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CT}}_{\|\overrightarrow{CT}\|^2} \Rightarrow \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = R^2$$

$$\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha) : \ (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = R^2$$

b) $\Sigma : (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 289$ $\qquad T(14; 4; -6)$ ,

$T \in \Sigma : \qquad 12^2 + 8^2 + 9^2 = 144 + 64 + 81 = 289$

$(\alpha) : \qquad 12(x-2) + 8(y+4) - 9(z-3) - 289 = 0$

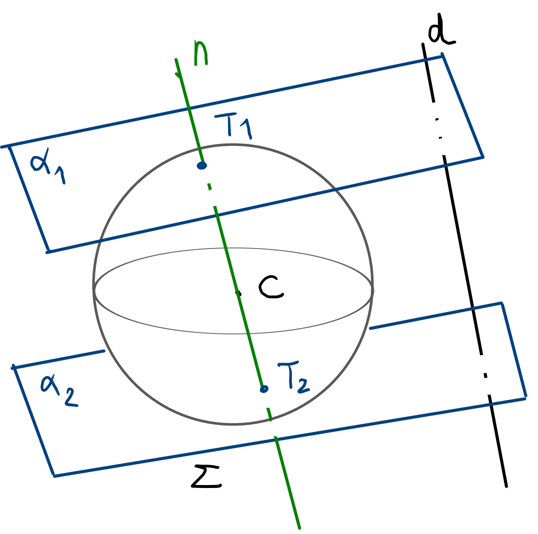
$12x + 8y - 9z - 24 + 32 + 27 - 289 = 0$

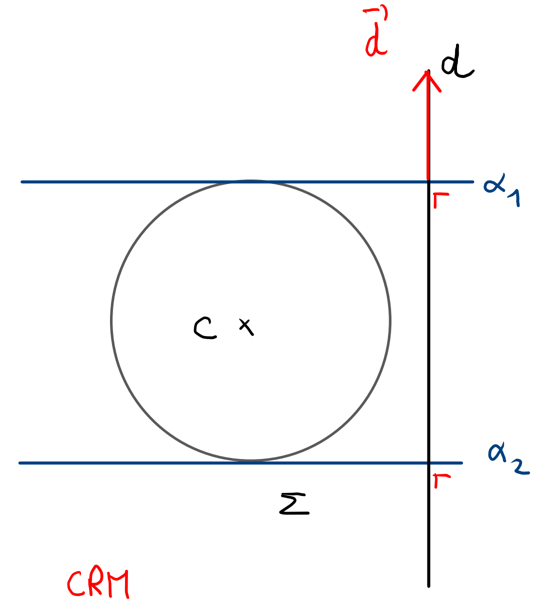
$(\alpha) : \qquad 12x + 8y - 9z - 254 = 0$

**3.7.7** On donne la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 216$, ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations cartésiennes des plans perpendiculaires à $d$ et tangents à $\Sigma$, ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec $\Sigma$.




$\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \alpha_1$ et $\alpha_2$

$(\alpha) : 7x - 2y - z + d = 0$

CRM

| Distance du point $P$ au plan $\pi$ | $\delta(P;\pi) = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d \rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ |
|---|---|

$\delta(\alpha_1, C) = R$

$$\frac{|7\cdot 0 - 2\cdot 0 - 0 + d|}{\sqrt{7^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{216} \iff |d| = \sqrt{54}\cdot\sqrt{216}$$

$$\underline{|d| = 108}$$

$(\alpha_1) : 7x - 2y - z - 108 = 0$

$(\alpha_2) : 7x - 2y - z + 108 = 0$

Déterminons $\Sigma \cap \alpha_1$, mieux $\alpha_1 \cap n$ où $(n) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

L'intersection : $7 \cdot 7k - 2 \cdot (-2k) - (-k) - 108 = 0$

$54k = 108 \Rightarrow k = 2$

$T_1(14; -4; -2)$

et $T_2(-14; 4; 2)$ symétrique de $T_1$ par rapport à $O(0,0,0)$