

27.08.24

Exercice

Trouver des équations cartésiennes passant par les points $P_1(-2; 1; 4)$ et $P_2(3; 1; 2)$.

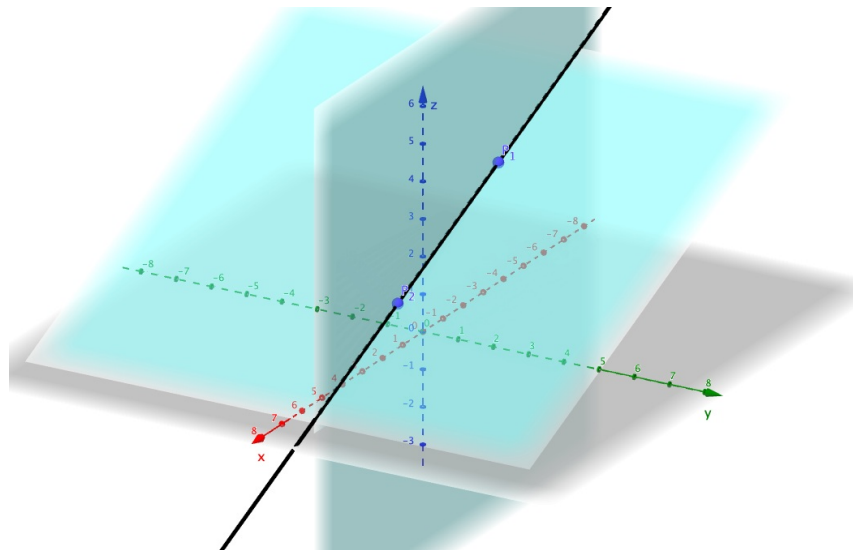
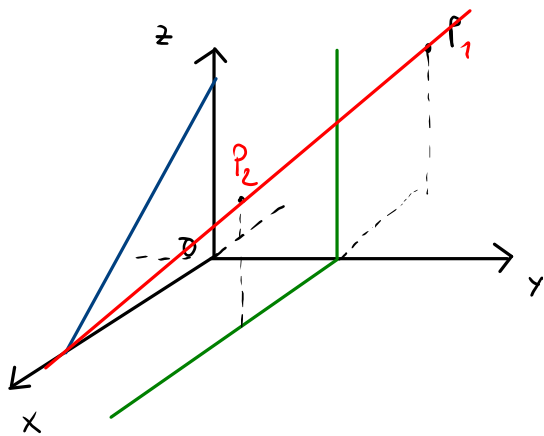
Représenter cette droite graphiquement

Calculons un vecteur directeur : $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Un système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -2 + 5K \\ y = 1 \\ z = 4 - 2K \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \\ \cdot 5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5z = 16 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5z - 16 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$



La droite $P_1P_2 \parallel \text{Plan } Oxz$

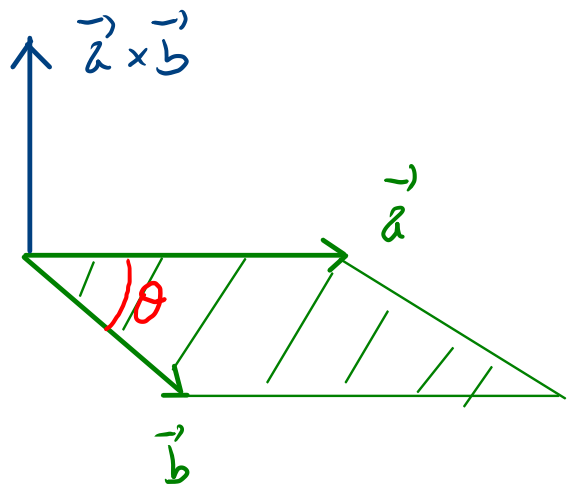
$$\begin{cases} \frac{x+2}{5} = \frac{z-4}{-2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Le produit vectoriel

Soit $\vec{a}, \vec{b}$ dans V_3 non nuls.

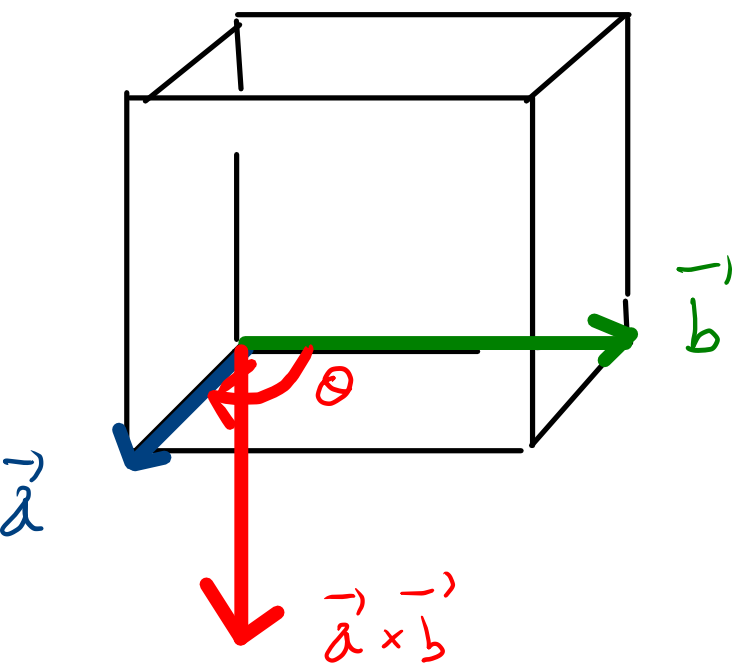
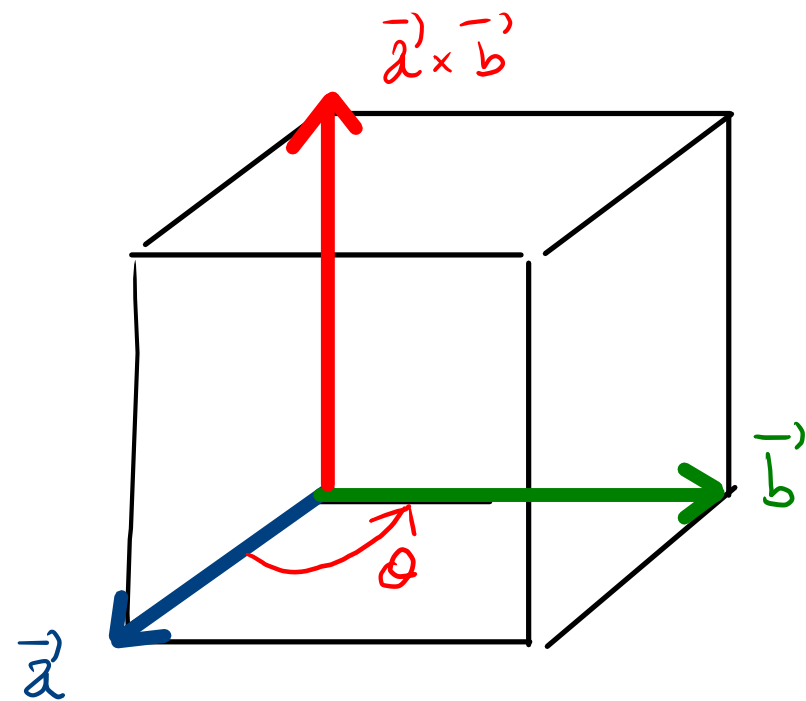
Le produit vectoriel, noté $\vec{a} \times \vec{b}$, est un vecteur perpendiculaire au plan défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$, dont la norme vaut

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\theta) \quad , \quad \text{où } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ est l'angle formé par } \vec{a} \text{ et } \vec{b}$$

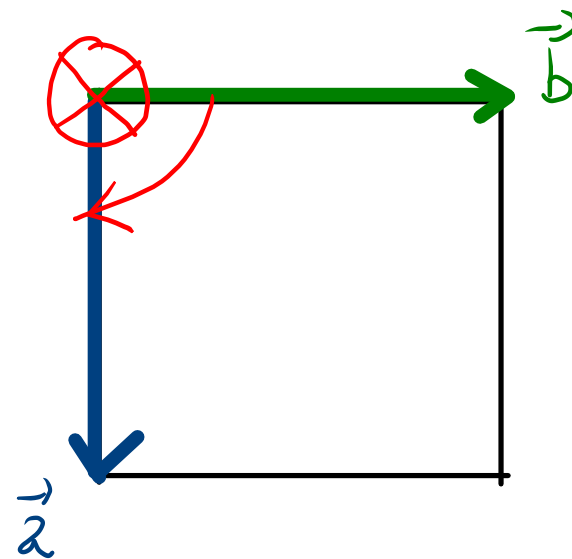
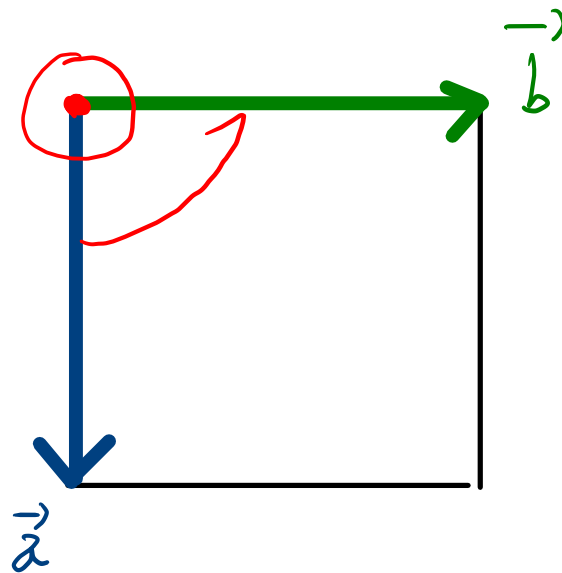


$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Règle de la vis



$$\vec{a} \times \vec{b}$$



Propriétés du produit vectoriel

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \text{anti-symétrique}$$

$$2) \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

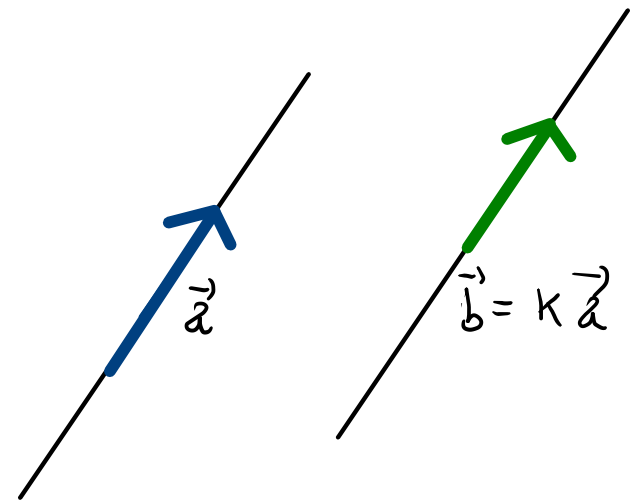
$$3) (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b}), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$4) k\vec{a} \times m\vec{b} = km(\vec{a} \times \vec{b})$$

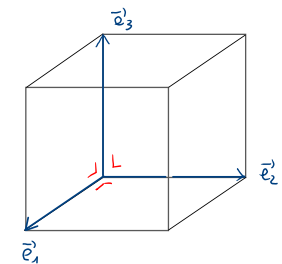
$$5) \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

De 5) : $\vec{a}$ et $\vec{b}$ parallèles $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{a} = k(\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0}$$



Produit vectoriel contenant une base



$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée

$\vec{x}$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$\vec{0}$	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_3$	$\vec{0}$	$\vec{e}_1$
$\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	$\vec{0}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \times (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \\ &= \underbrace{(a_1 \vec{e}_1 \times b_1 \vec{e}_1)}_{\vec{0}} + \underbrace{(a_1 \vec{e}_1 \times b_2 \vec{e}_2)}_{\vec{a}_1 b_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)} + \underbrace{(a_1 \vec{e}_1 \times b_3 \vec{e}_3)}_{a_1 b_3 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)} \\ &\quad + \underbrace{(a_2 \vec{e}_2 \times b_1 \vec{e}_1)}_{a_2 b_1 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)} + \underbrace{(a_2 \vec{e}_2 \times b_2 \vec{e}_2)}_{\vec{0}} + \underbrace{(a_2 \vec{e}_2 \times b_3 \vec{e}_3)}_{a_2 b_3 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)} \\ &\quad + \underbrace{(a_3 \vec{e}_3 \times b_1 \vec{e}_1)}_{a_3 b_1 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)} + \underbrace{(a_3 \vec{e}_3 \times b_2 \vec{e}_2)}_{a_3 b_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)} + \underbrace{(a_3 \vec{e}_3 \times b_3 \vec{e}_3)}_{\vec{0}} \\ &= \underbrace{a_1 b_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)}_{\vec{a}_1 b_2 \vec{e}_3} - a_2 b_1 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + \underbrace{a_1 b_3 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)}_{-a_1 b_3 \vec{e}_2} - a_3 b_1 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + a_2 b_3 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) - a_3 b_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{e}_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{\text{on change le signe}} \vec{e}_2' + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1' \end{aligned}$$

Produit vectoriel de deux vecteurs

Composantes du produit vectoriel

$$\text{Si } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \text{ alors } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

On note aussi ce produit $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Exemple $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -8+3 \\ -3-4 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Avec les déterminants :

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & 1 & -1 \\ \vec{e}_2 & -2 & -1 \\ \vec{e}_3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (-8+3) \vec{e}_1 - (4+3) \vec{e}_2 + (-1-2) \vec{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.5 Le plan dans l'espace

3.5.1 On donne les plans $\alpha : 2x + 3y - 3z - 5 = 0$ et

$$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

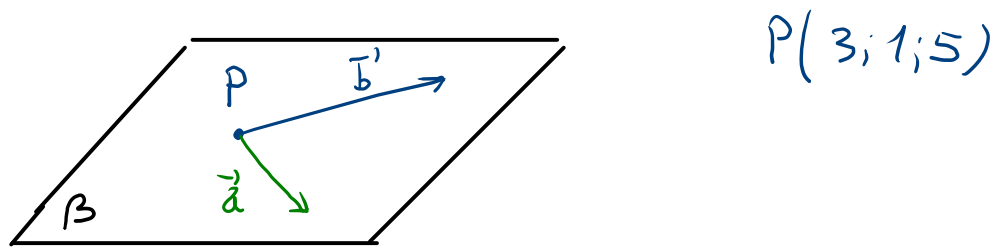
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les points $A(-2; 7; 8)$ et $B(4; 3/2; 5/2)$ appartiennent-ils à ces plans ?

$(\alpha) : 2x + 3y - 3z - 5 = 0$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$-2 \quad 7 \quad 8$

$: -4 + 21 - 24 - 5 \neq 0 \quad A \notin \alpha$



$$\begin{cases} -2 = 3 - 2\lambda + \mu \\ 7 = 1 + \lambda - 4\mu \\ 8 = 5 + 3\lambda + 3\mu \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} \lambda & \mu \\ \hline -1 & -4 \\ 2 & 1 \end{array}$$

on la laisse de côté!

$\Rightarrow \begin{cases} 12 = 5 - 7\mu \\ -1 = 13 - 7\lambda \\ 3 = 3\lambda + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -1 \\ \lambda = 2 \\ 3 \stackrel{?}{=} 6 - 3 \end{cases} \checkmark \Rightarrow A \in \beta$

Jevdi 3.5.1 et 3.4.5