27.11.24

Base d'un espace vectoriel

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un ev si elle est à la fois libre et génératrice.

Remarques

1) Libre : $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

2) Génératrice : $\forall v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

La famille de nombres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est unique

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les composantes du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$

3) Toutes les bases de V ont le même nombre d'éléments.

On peut définir la dimension de V par le nombre d'élément de l'une de ses bases. On note $\dim(V) = n$.

Maxi exemple

1) $$M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ (a_{ij}) \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i, j \leq 2 \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\mathcal{B}^* = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$$

1.2.18 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1; 1; -1)$ $e_2 = (1; -1; 0)$ $e_3 = (1; 0; 1)$ $u = (0; 1; 0)$

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$$

Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, il suffit de démontrer qu'elle est libre

Si $\dim(V) = n$, alors toute famille libre de n vecteurs est une base.
Si $\dim(V) = n$, alors toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

$\mathcal{B}$ est libre. En effet,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (0,0,0)$$

$$\lambda_1 (1,1,-1) + \lambda_2 (1,-1,0) + \lambda_3 (1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}$$

Matrice B échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

On dit que $\text{rang}(B) = 3$

Donc $\mathcal{B}$ est une base.

a) $e_1 = (1;1;-1)$ $\quad$ $e_2 = (1;-1;0)$ $\quad$ $e_3 = (1;0;1)$ $\quad$ $u = (0;1;0)$

Trouver $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3 = (0, 1, 0)$

$$\Leftrightarrow x(1,1,-1) + y(1,-1,0) + z(1,0,1) = (0,1,0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

1.2.18 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

b) $e_1 = (1; -1; 0)$ $\qquad e_2 = (0; 1; -1)$ $\qquad e_3 = (1; 0; 2)$ $\qquad u = (1; 1; 1)$

$$\mathcal{B}^* = (e_1, e_2, e_3)$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*} \qquad\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrice de changement de base

$$(\text{identite})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*} : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}^*) \xrightarrow{\text{id}} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$$

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_* \longmapsto PX$$

<u>Exemple</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff PX = Y$$

$$X = P^{-1} Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2.19 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que la famille $(2 - x; 1 + 2x; 1 - x^2)$ est une base de P_2. Calculer les composantes relativement à cette base des polynômes x^2 et $(2x - 1)^2$.

$$P_2 = \{ c + bx + ax^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim(P_2) = 3$$

Quelle est la base naturelle de P_2 : $\mathcal{B} = (1 ; x ; x^2)$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} , \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} , \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\mathcal{B}^* = (2 - x, 1 + 2x, 1 - x^2)$$

$$\lambda_1 (2 - x) + \lambda_2 (1 + 2x) + \lambda_3 (1 - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (2; -1, 0) + \lambda_2 (1, 2, 0) + \lambda_3 (1, 0, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{de rang } 3}$$

$p = x^2$ $\quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $p = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$

$q = (2x - 1)^2$ $\quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\quad q = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$

$$a(2 - x) + b(1 + 2x) + c(1 - x^2) = x^2$$

$$2a - ax + b + 2bx + c - cx^2 = x^2$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -a + 2b = 0 \\ -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ 2a + b = 1 \\ -a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = 2/5 \\ b = 1/5 \end{cases}$$

$$p = x^2 \quad p = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ -1 \end{pmatrix}_{*} \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$